Гороховский А.Н.

Моделирование и прогнозирование состояния окружающей среды

Основная литература

1. Оценка современного и прогнозного состояния природной среды. Под ред. Букс И.И., Мяч Л.Т. Московское отделение Гидрометеоиздата 1990. (5 О93)
2. Горстко А.Б., Угольницкий Г.А. Введение в моделирование эколого-экономических систем. Ростов н/Д. Издательство Ростовского университета, 1990. 112с. (57 Г70).
3. Математические модели водных экосистем. ВЦ АН СССР, Москва 1984. (57 М34).
4. Петросян Л.А., Захаров В.В. Введение в математическую экологию. –Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1986, 224с.(57 П31)
5. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды, 1982. (5 М30)
6. Математическое моделирование. Под ред. Дж.Эндрюса и Р.Мак-Лоуна. Изд-во «МИР», Москва 1979. (51 М34).
7. Пененко В.В., Алоян А.Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. – Новосибирск: Наука, 1985. 160с. (5 П25)
8. Воробьев Н.Н. Теория игр: Лекции для экономистов-кибернетиков. –Л., 1973, 160с.
9. Берлянд М.Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. –Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 448с.
10. Экологические системы. Адаптивная оценка и управление. Под ред. Холинга К.С. – М., 1981, 396с.

Дополнительная литература.

1. Человек и биосфера. / Моисеев Н.Н., Александров В.В., Тарко А.М.
2. Вторжение в природную среду. Оценка воздействия. / А.Ю.Ретеюма. - М.: Прогресс, 1983. -193с.
3. Экология глазами математика. / Моисеев Н.Н.
4. Приложение математических моделей к анализу эколого-экономических систем./ Брусиловский П.М., Гурман В.И., Дроздовский Э.Е. и др. Новосибирск: Наука, 1988. 212с.
5. Основы логико-информационного моделирование сложных геосистем. / Беляев В.И., Худошина М.Ю.
6. Географическое обоснование экологических экспертиз. / М., МГУ, 1985
7. Математическое моделирование глобальных биосферных процессов. / Крапивин В.Ф., Свирежев Ю.М., Тарко А.М., М., 1972

8. Метод Лагранжа в кинетике облачных процессов/ Беляев В.И.
9. Математическое моделирование больших систем/ Максимей И.В. –Минск.: Выш.шк.,1985.–119с.
10. Одум Ю. Экология, 1986
11. Федоров В.Д., Гильманов Т.Г. Экология, 1980
12. Уильямсон М. Анализ биологических популяций. 1975
13. Базыкин А.Д. Математическая физика взаимодействующих популяций, 1985
14. Смит Дж.М. Модели в экологии, 1976
15. Семевский Ф.Н., Семенов С.М. Математическое моделирование экологических процессов, 1982
16. Позин В.А. Математика, компьютер, прогноз погоды, 1991.

Введение

Экология – это наука об отношениях растительных и животных организмов между собой и с окружающей средой. Ее объектами являются популяции организмов, биологические виды, сообщества, экосистемы и биосфера в целом. Поэтому экология сильно отличается от других наук, здесь нет единой основы, которая в других науках подобно мощному стволу дерева порождает более специализированные направления исследований. Как раз наоборот, многие науки: ботаника, зоология, климатология, физическая география, почвоведение, биохимия, прикладная математика сливаясь воедино образуют могучий ствол.

Необходимость решения экологических проблем требует от математиков разработки специальных методов построения и исследования математических моделей экологических процессов. Сложность строения и функционирования экосистем, делают их одним из чрезвычайно трудных для изучения объектов и требуют объединения методов: физических, химических, геолого-географических и биологических наук.

Работа по оценкам воздействия (ОВ) и прогнозированию была широко начата в США с конца 60-х годов, после принятия закона о национальной политике в области охраны окружающей среды – NEPA, 1969г., один из пунктов которого обязывает все федеральные агентства США определять и развивать методы и процедуры, которые «обеспечат соответствующее рассмотрение тех ценностей окружающей среды, которые в настоящее время не имеют численного выражения».

В сферу моделирования и прогнозирования воздействия на ОС входят следующие компоненты природной среды:

- *воздух;*
- *вода;*
- *земельные ресурсы;*
- *биота - флора, фауна и среда их обитания.*

Прогнозируется возможное ухудшение их качества и последствия для человека и экономики в результате этого предполагаемого ухудшения. При этом предсказание воздействия и отклика на них систем, подвергшихся воздействию, основано на предположении, что будущее поведение системы будет подобно в главных аспектах ее прошлому поведению. Однако в сложных взаимодействующих системах ОС это предположение далеко не всегда выполняется, и решения принимаются в условиях неопределенности. Поэтому на практике часто не ограничиваются каким-либо одним методом или моделью, а сбалансировано используют их комбинации. При этом учитывается мнение общественности для принятия наиболее приемлемого решения.

Любые влияния на биофизическое и социально-экономическое окружение, которые непосредственно возникают от хозяйственной деятельности человека, рассматривают как *первичные воздействия (воздействия первого рода)*.

Вторичные воздействия (воздействия более высокого порядка) – это более отдаленные влияния на окружающую среду, которые являются следствием воздействия деятельности человека, хотя непосредственно этим воздействием не инициируется.

В процессе моделирования и последующего прогнозирования воздействий решают следующие четыре задачи:

1. *выполняют идентификацию воздействия;*
2. *проводят модельные расчеты;*

3. *интерпретируют результаты расчетов и получают количественную оценку воздействия;*
4. *доводят информацию о воздействии до лиц, принимающих решения (ЛПР).*

Несмотря на большой опыт в проведении ОВ и прогнозирования в различных странах (например, в США к 1980г. их было более 10 тыс.), методологическая база для их осуществления разработана еще недостаточно, в основном производилось ОВ на ОС отдельных проектов.

Понятие модели

Приведем несколько примеров поясняющих, что такое модель, а потом дадим определение.

1. Архитектор готовится построить здание невиданного до сих пор типа. Но прежде чем воздвигнуть его, он сооружает это здание из кубиков на столе (или с помощью компьютерных программ), чтобы посмотреть, как оно будет выглядеть.

2. Моделью является и плакат, на котором стрелками изображены направления движения крови, показывающий как функционирует система кровообращения.

3. Перед тем как запустить в производство новый самолет, его помещают в аэродинамическую трубу и с помощью соответствующих датчиков определяют величины напряжений, возникающие в различных частях конструкции.

4. Моделью является и весящая на стене картина, изображающая бушующее море.

Как видим, во всех примерах имеет место сопоставление некоторого объекта с другим, его заменяющим:

(1) реальное здание – здание из кубиков;

(2) система кровообращения – схема на плакате;

(3) серийный самолет – единичный самолет в трубе;

(4) бушующее море – картина его изображающая.

Во всех случаях предполагается, что какое-то свойство сохраняется при переходе от исходного к заменяющему его объекту.

(1) Хоть здание из кубиков и много меньше настоящего, но оно позволяет судить о его геометрии и внешнем виде.

(2) Хоть плакат и не имеет ничего общего с тканями и органами живого организма, но он позволяет судить о направлениях движения крови, т.е. о том, откуда и куда течет кровь.

(3) Хоть самолет в аэродинамической трубе никуда не летит, но напряжения, возникающие в его корпусе, соответствуют условиям полета.

(4) Хоть картина и море с физической точки зрения не имеют, казалось бы, ничего общего, но эмоции они могут вызвать сходные.

После этого понятным становится такое определение модели:

Модель – это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные его черты.

Хорошо построенная модель, как правило, доступнее для исследования, нежели реальный объект. Более того, некоторые объекты не могут быть изучены непосредственно, например: недопустимы эксперименты с экономикой страны в познавательных целях или с планетами Солнечной системы.

Таким образом, модель нужна, для того чтобы:

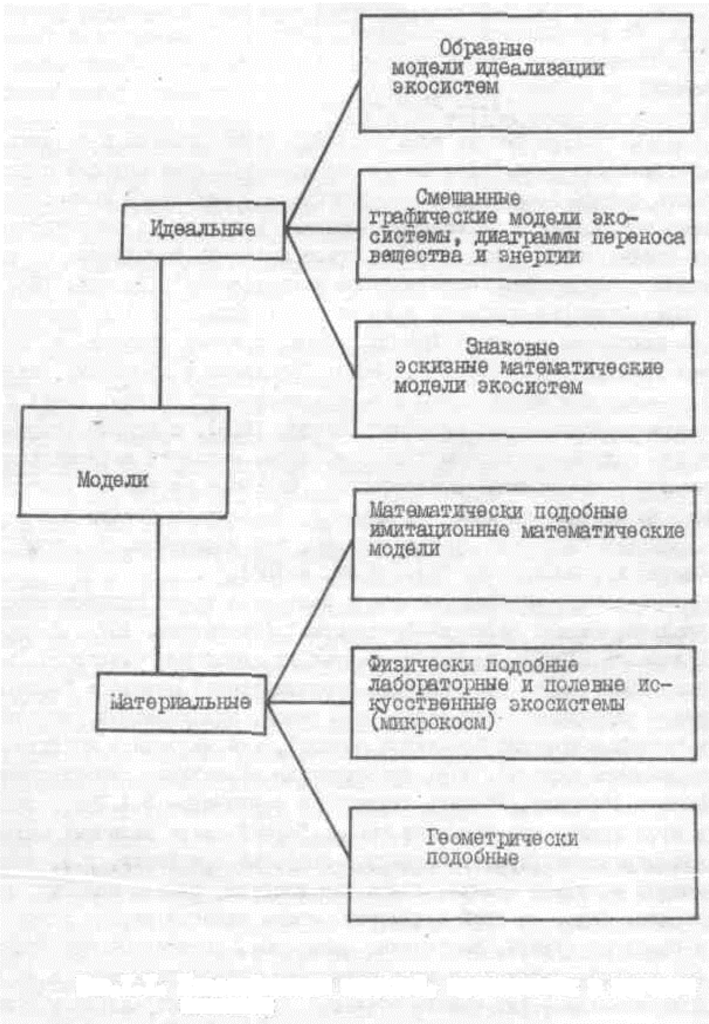


Рис.1. Классификация моделей

1. понять, как устроен конкретный объект, т.е. какова его структура, основные физические, химические, динамические, биологические свойства, а также законы развития и взаимодействия с окружающим миром;

2. научится управлять объектом (или процессом) и определять наилучшие способы управления при заданных целях и критериях;
3. прогнозировать прямые и косвенные последствия при заданных способах и формах воздействия на объект.

Хорошо построенная модель, как правило, обладает удивительным свойством: ее изучение дает некоторые новые знания об объекте-оригинале и это играет притягательную роль для лиц, занимающихся построением и изучением моделей. Сам процесс построения моделей называется моделированием.

Виды моделей и способы моделирования

Рассмотрим теперь виды моделей, применяющихся в различных методиках оценки воздействия на ОС и в научных исследованиях. За основу классификации моделей принято брать способ воспроизведения оригинала в модели.

По способу моделирования выделяют две большие группы моделей:

1. *материальные (предметные)*;
2. *идеальные (мысленные).*

К *материальным* относятся такие модели, которые воспроизводят основные геометрические, динамические и функциональные характеристики изучаемого объекта.

По типу сходства с оригиналом в группе материальных моделей выделяют три основных класса:

Первый класс включает модели геометрически (пространственно) подобные оригиналу. Примерами этих моделей являются всевозможные макеты и муляжи, такие как глобусы, модели молекул, кристаллов, широко используемые в биологии чучела, высушенные насекомые, окрашенные препараты срезов тканей, зафиксированные препараты микроорганизмов, т.е. модели, приготовленные "из самого объекта-оригинала", за счет, устранения некоторых кажущихся несущественными в данной связи его свойств.

Второй класс состоит из моделей, имитирующих динамические свойства оригинала - физически подобных моделей. Это достигается за счет использования в качестве модели предмета одинаковой с объектом моделирования физической природы. Примерами такого моделирования могут служить частые в экологии случаи применения популяций лабораторных животных, служащих моделями естественных популяций (дрозофилы в генетике, дафнии в водной токсикологии), лабораторные экосистемы в виде лотков с водой, моделирующих реки и водоемы, а также озер – в качестве моделей морей и океана.

В третий класс входят модели, сохраняющие с реальным объектом лишь отношения аналогии в наблюдаемых процессах и явлениях, т.е. в основе функционирования, как объекта исследования, так и модели лежат одни и те же математические закономерности. Эти модели называют математически подобными (аналоговые). Аналоговая модель строится в виде характеристик иной, чем у моделируемого объекта, физической природы. Обязательно лишь, чтобы известные стороны модели описывались той же математической формулой, что и моделируемые свойства объекта.

Пример аналогового моделирования - изучение механических колебаний с помощью электрической схемы, описываемой теми же дифференциальными уравнениями.

Аналоговые модели тесно связаны с группой идеальных моделей. Для понимания отличия последних моделей от других ознакомимся с группой идеальных, или мысленных моделей. Достаточно учесть то, что для построения материальной модели необходимо, в первую очередь, мысленно представить ее себе, т.е. создать идеальную модель.

Идеальные модели могут существовать не только в голове исследователя, но и быть запечатленными на бумаге в виде словесного, графического, математического или другого знакового описания. Существенной их чертой является то, что все преобразования в них, все переходы в другое состояние осуществляются мысленно, т.е. в сознании человека, который опирается при этом на определенную семантику и пользуется логическими, математическими, физическими и другими специфическими правилами и законами. Понятно, что уравнение, записанное на бумаге, не будет моделью динамики численности популяции само по себе, в руках неграмотного или просто незнакомого с данными обозначениями человека.

По способу построения идеальных моделей, среди них выделяют три класса:

1. Образные (интуитивные) модели - построенные из чувственно-наглядных элементов, которые не подаются формализации либо не нуждаются в ней.

Примерами построения моделей, принадлежащих к образным идеальным моделям, может служить произведения искусства (живопись, музыкальные произведения), а также жизненный опыт каждого человека, как модель окружающего мира.

2. Знаковые модели – использующее знаковые преобразования какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, формулы (математические, химические), наборы символов, а также законы, по которым оперируют с этими знаками.

Важнейшим видом знакового моделирования является математическое моделирование, при котором исследование объекта осуществляется посредством модели, сформулированной на языке математики, и использованием математических методов. Классическим примером является описание и исследование основных законов механики Ньютоном.

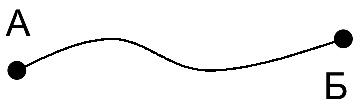
3. Смешанные (концептуальные) модели - представляют собой промежуточную по отношению к первым двум группу, в которую можно объединить схемы, чертежи, карты, графики и т.п.

Они представляют собой несколько более формализованный и систематизированный вариант традиционного естественно-научного описания (трактата, теории) изучаемой экосистемы, состоящей из научного текста, сопровождаемого блок-схемой системы, таблицами, графиками и прочим иллюстративным материалом.

Пример построения модели равномерного движения

Представим, что мы ничего не знаем о свойствах равномерного прямолинейного движения и все формулы этого раздела физики забыты. В таких условиях необходимо решить следующую задачу:

Из пункта А в пункт Б, который удален от него на S=100 км вышел пешеход. Он проходит в час v=5 км. Через сколько часов он придет в пункт Б, если его движение равномерное и прямолинейное. Напомним, что разделить 100 на 5 и получить результат нельзя в силу нашего условия.



Приступим к решению. Несомненно, из предварительных наблюдений, что пройденный путь S зависит от скорости движения v и времени t, в течение которого продолжается движение, т.е. можно утверждать, что между ними существует функциональная связь:

$$S = f(v,t)$$

Если нам удастся определить вид функции, то это была бы математическая модель равномерного прямолинейного движения. Как это сделать? Не вызывает сомнения следующие определения:

1) чем больше значение скорости v, тем больше S (при $t=const$):

$$S \uparrow \approx v \uparrow$$

2) чем больше значение времени движения t, тем больше S (при $v=const$):

$$S \uparrow \approx t \uparrow$$

Перечисленным условиям, в общем виде, может удовлетворять функция вида:

$$f(v,t) = v^m \cdot t^n, \qquad m > 0, n > 0$$

Величины n и m необходимо подобрать так, чтобы они соответствовали результатам наблюдения за пешеходом. Можно подбирать n и m, пользуясь методом проб и ошибок, а можно свести поиск этих величин к решению математической задачи, например методом наименьших квадратов (МНК). Этот метод предоставляет наиболее универсальную возможность для определения вида аналитической функции:

- прямолинейной;
- обратной;
- параболической;
- гиперболической;
- степенной, экспоненциальной;
- логарифмической;
- периодической и комбинации их.

В общем, виде процедура поиска функциональной зависимости и соответствующих ей коэффициентов, которые задают ее расположение в пространстве, например, как в примере это n, m, состоит из следующих этапов:

1. среди набора предполагаемых видов функциональных зависимостей, с помощью коэффициента корреляции, определяют наилучшую:

$$r = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j}{n-1},$$

где $x_j = \left(X_j - M_x\right) \cdot \sigma_x^{-1}$ и $y_j = \left(Y_j - M_y\right) \cdot \sigma_y^{-1}$ - нормированные отклонения;

$\sigma_x = \sqrt{(n-1)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(X_j - M_x\right)^2}$ и $\sigma_y = \sqrt{(n-1)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(Y_j - M_y\right)^2}$ - среднеквадратические отклонения; M_x и M_y – средние арифметические:

$M_x = n^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j$ и $M_y = n^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} Y_j$.

2. Затем из совокупности выбранного типа кривых, например линейных

$$Y = a + b \cdot X$$

находят такую, для которой коэффициенты a и b, рассчитываемые по формулам:

$$b = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2} \qquad a = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i - b \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i\right), \tag{1}$$

обеспечивают наименьшую сумму квадратов отклонений эмпирических данных ($Y_Э$) от вычисленных (Y_P):

$$\left(Y_Э - Y_P\right)^2 \Rightarrow \min$$

Для функций отличных от линейной, их приводят к нормальному виду, используя различные математические приемы, например:

1. Логарифмирование:

$$Y = f(X) \to \log(Y) = \log(f(X))$$

$$Y = f(X) \to \ln(Y) = \ln(f(X))$$

2. Потенцирование:

$$Y = f(X) \to 10^{Y} = 10^{f(X)}$$

$$Y = f(X) \to \exp^{Y} = \exp^{f(X)}$$

3. Извлечение корня:

$$Y = f(X) \to \sqrt[z]{Y} = \sqrt[z]{f(X)}$$

4. Возведение в степень:

$$Y = f(X) \to Y^{z} = (f(X))^{z}$$

5. Замена функций на обратные им; 6. Агрегирование аргументов и функций;

7. Разделение аргументов и функций и комбинацию перечисленных выше приемов.

В случае рассматриваемого примера необходимо выполнить логарифмические преобразования:

$$\ln S = m \cdot \ln v + n \cdot \ln t$$

Если при наблюдении зафиксировать $v = const$, тогда:

$$Y = \frac{\ln S}{\ln v},\ a = m,\ b = n,\ X = \frac{\ln t}{\ln v}$$

Используя материал наблюдений за пройденным расстоянием S, конечным результатом решения (1) для нашего примера будет $n=1$, $m=1$:

$$S = v \cdot t$$

Пользуясь этой моделью можно без труда вычислить, что пешеход попадет из А в Б через 20 часов: $t = 100 : 5 = 20$

Таким образом, математическая модель возникла в результате принятия определенной научной гипотезы и последующей оцифровки ее выражения на основе результатов наблюдений (экспериментов).

Итак, модель построена. На следующем этапе разрабатывается или используется созданный ранее алгоритм для анализа этой модели. Если модель и алгоритм не слишком сложны, применяют аналитическое исследование модели. Иначе составляется программа, которая реализует алгоритм на ЭВМ. После выполнения расчетов по модели на ЭВМ их результаты обязательно сравнивают с фактической информацией. Это необходимо, чтобы убедится в адекватности модели, в том, что модельным расчетам можно верить, их можно использовать. Если расчеты не имеют ничего общего с реальностью, то необходимо усовершенствовать модель, исправить возможные ошибки в алгоритме или программе для ЭВМ.

Одной из особенностей моделирования в экологии является использование системного подхода, который позволяет избежать редукционизма и найти адекватные формы математического описания объектов.

Редукционизм проявляется в том, что более углубленное изучение явлений отождествляется со все более мелким дроблением изучаемого объекта на части. При системном подходе явление или объект рассматривается как единое целое по отношению к окружающему миру, а его свойства рассматриваются через реакцию на внешние воздействия.

Другой важной особенностью сложных экосистем является ограниченная возможность проведения экспериментов. В случае невозможности выполнения запланированного эксперимента, он заменяются пассивными наблюдениями в комплексе с имитационными экспериментами на модели.

Принципы моделирования эколого-биологических систем

Математическая экология как наука начала формироваться в начале XX столетия. Ее возникновению способствовали труды выдающегося математика Вито Вольтерра («Математическая теория борьбы за существование», 1931г. Париж - первой попытки построения математической теории биологических сообществ) и его современников А.Лотки и В.А.Костицина. Дальнейшее развитие математической экологии связано с именами Г.Ф.Гаузе, А.Н.Колмогорова, Ю.Одума, Ю.М.Свирежева, Р.А.Полуэктова и др. Наиболее глубоко математические методы проникли в исследование вопросов динамики численности биологических популяций.

Различные модификации вольтерровских моделей составляют в настоящее время один из наиболее изученных разделов математической экологии. Как правило, в вольтерровских моделях описываются популяции и сообщества живых организмов. При этом параметры абиотической (неживой) среды предполагаются неизменными. Большое число моделей, описывающих динамику абиотических компонент экосистемы, как правило, выполнено с помощью уравнений математической физики.

При построении моделей математической экологии используется опыт математического моделирования механических и физических систем. Кроме этого, экологобиологическим системам присущи следующие специфические особенности:

1. Сложность внутреннего строения каждой особи;
2. Полифакториальность внешней среды (условий жизнидеятельности организмов);
3. Энергетическая и информационная незамкнутость (проточность) экосистем;
4. Существенная нелинейность – огромный диапазон внешних характеристик, при которых сохраняется жизнеспособность систем.

Эти особенности влекут следующие математические следствия:

1. Многомерность пространства экосистемы;
2. Множественность параметров, задающих сложную среду функционирования системы;
3. Совместное моделирование биосистемы и среды ее функционирования;
4. Различный характер нелинейностей биологических моделей, как правило, экспоненциальных и степенных.

Учитывая перечисленные следствия, выдающимся математиком А.А.Ляпуновым были сформулированы следующие принципы математического моделирования экосистем:

1. концептуальная основа моделирования;
2. полнота описания;
3. принцип «развивающейся» модели;
4. иерархия моделей;
5. системный подход;
6. сотрудничество математиков и естествоиспытателей;
7. информационное обеспечение.

1. Концептуальная основа моделирования – это выявление основных участвующих элементов явления с перечислением элементарных процессов, в которых они участвуют, а также происходящих изменений в результате этого.

Математическим моделям должны предшествовать различные идеальные «предмодели», т.е. логические (концептуальные) схемы будущих знаковых моделей. Их назначение в том, чтобы в условиях нехватки информации для построения модели в целом связать имеющиеся представления о явлении и выяснить какие дополнительные исследования нужны для получения необходимых данных. После этого конструируется некоторая концептуальная система, элементами которой служат абстрактные объекты – образы изучаемого явления.

2. Полнота описания состоит в том, что для каждой ситуации, которая может возникнуть в данной системе, должно быть ясно, какой элементарный процесс будет выполняться.

При этом полнота описания не исключает того, что некоторые процессы могут носить случайный характер и описываться вероятностными методами. С другой стороны, полнота описания не предполагает учета всех мелких обстоятельств, которые могут повлиять на изучаемое явление.

3. Принцип развивающейся модели состоит в последовательном переходе от простых, грубых моделей к более сложным.

Моделирование всегда начинают с более простых моделей. Вначале значительно огрубляют изучаемые явления и, только выявив, чем грубые модели плохи, вводят их усложнение. Последовательность моделей, все лучше и лучше описывающих действительность и результаты наблюдений, сама по себе представляет интерес. В то же время при построении слишком сложной модели легко запутаться и стать на ложный путь.

Реализации этого принципа способствует организация блочной (модульной) структуры модели. В этом случае модель строится из сравнительно автономных подмоделей (блоков, модулей, подпрограмм), описывающих соответствующие части экосистемы. Такая структура позволяет наращивать число блоков, учитывать новые факторы и естественнонаучные сведения.

4. Иерархия моделей заключается в том, что система подмоделей (блоков, модулей) строиться в соответствии с уровнями организации живой природы, т.е. объекты моделирования низшего уровня, служат элементами моделей высшего уровня.

Можно выделить четыре таких уровня:

1. клеточно-молекулярный;
2. организменный;
3. популяционный;
4. экосистемный (биогеоценозный).

Среди них к области экологии относятся два последних уровня – популяционный и экосистемный, при этом оперируют следующими понятиями популяции и экосистемы.

Популяция – это любая группа организмов одного вида, занимающая определенное пространство и функционирующая как часть биотического сообщества.

Биотическое сообщество – совокупность популяций, которая функционирует как целостная единица в отведенном ему пространстве физической среды обитания.

Экосистема (Биогеоценоз - БГЦ) – это совокупность на определенном протяжении земной поверхности однородных природных явлений (атмосферы, горной породы, растительности, животного мира и мира микроорганизмов, почвы и гидрологических условий), имеющая свою специфику обмена веществом и энергией между слагающими ее компонентами и другими явлениями природы.

Понятие БГЦ и экосистемы близки по смыслу и часто употребляются как синонимы, однако они не тождественны. Основное различие между ними в том, что при выделении экосистемы не существенны имеющиеся природные границы: в качестве экосистемы можно рассматривать не только реально существующие сообщества, но любые, даже неустойчивые структуры.

Системный подход при моделировании некоторой экосистемы состоит в следующем:

1) каждая экосистема рассматривается как система из определенных блоков;
2) в каждом блоке имеется запас вещества и энергии;
3) существуют потоки вещества и энергии, переходящие из одного блока в другой, а также входящие и выходящие из некоторых блоков за его пределы.

Блок – некоторый элемент экосистемы, в который вещество и энергия поступает, хранится или перерабатывается и из которого она выходит. Одну и ту же экосистему можно членить на блоки разного масштаба. В одном случае под блоком можно понимать популяцию, в другом – функциональную группу.

6. Сотрудничество математиков и естествоиспытателей.

Существует следующая схема их совместной работы:

1. составление предварительной схемы явления;
2. выявление основных объектов и описание элементарных процессов;
3. построение математической модели и ее анализ;
4. сопоставление результатов анализа с реальным явлением;
5. выявление не учтенных или плохо учтенных обстоятельств, после чего – возврат к п.3. и т.д. до тех пор, пока не достигнуто достаточное согласование модели с действительностью.
6. выбор реальных вариантов явления, подлежащих детальному анализу;
7. осмысление получаемых результатов и выработка практических рекомендаций.

7. Информационное обеспечение.

Когда выяснена схема и сформулирована математическая модель, для проведения модельных расчетов определяются исходные данные, которые можно условно разделить на две части:

1. данные, характеризующие начальное состояние системы;
2. данные, характеризующие интенсивность протекания процессов.

Последние делят на две группы, состоящие из параметров:

a) которые можно извлечь, как следствие, известных законов природы (из справочников);

b) определяемые экспериментально, по результатам наблюдений.

Кроме полного набора значений исходных данных, необходима и достаточная их точность. Недооценка этого может свести на нет всю работу по математическому моделированию рассматриваемой экосистемы.

Модельный эксперимент

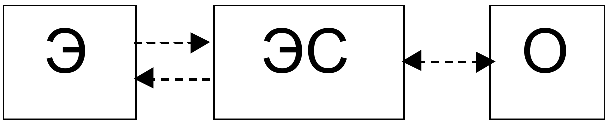


Рис.2. Схема эксперимента
Э – экспериментатор; О – объект;
ЭС – экспериментальные средства.

Прежде чем перейти к особенностям проведения экспериментов с моделями, необходимо немного остановиться на эксперименте как таковом. Структурная схема эксперимента приведена на рис.2.

Исходя из вышеприведенного определения модели, становится понятным, что основная ее функция в процессе познания (замещение объекта исследования) предполагает эксперимент, который мы вынуждены проводить с моделью из-за неосуществимости эксперимента с оригиналом. Если в обычном эксперименте экспериментатор непосредственно, или с помощью специального оборудования, воздействует на объект исследования и регистрирует его ответ на эти воздействия, то в случае модельного эксперимента все манипуляции проделываются не с реальным объектом, а с его моделью, т.е. между субъектом и объектом познания встает еще один барьер.

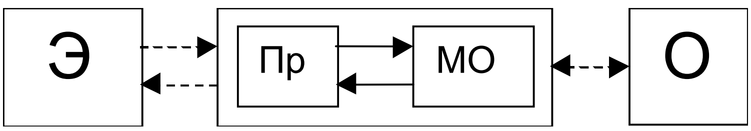


Рис.3. Схема модельного эксперимента
Э – экспериментатор; О – объект;
Пр – приборы; МО – модель объекта.

Модель в эксперименте играет двоякую роль. С одной стороны, по отношению к изучаемому объекту она выступает как средство экспериментального исследования, но с другой стороны, эксперимент проводится с моделью, и она в нем выступает как объект исследования. Таким образом, модель является одновременно и объектом изучения, и экспериментальным средством. Это изменяет структуру эксперимента, и теперь в нем можно выделить уже три операции:

1. переход от оригинала к модели;
2. моделирование, т.е. экспериментирование с моделью;
3. перенесение полученных результатов на оригинал.

Структурная схема модельного эксперимента изображена на рис.3.

Приведем схему модельных экспериментов из области экологии. В зависимости от вида модели, выбранного экспериментатором, сначала:

1. создается модель экосистемы (лабораторная или полевая установка, математическая модель);
2. экспериментатор меняет по своему усмотрению те или иные условия существования экосистемы: вносит токсичные вещества, повышает концентрацию биогенных элементов, добавляет дополнительные источники питания, увеличивает количество хищников, меняет освещенность, температуру, интенсивность перемешивания среды и т.д. В том случае, когда в качестве модельной экосистемы используется ее математическая имитация, необходимые воздействия осуществляются изменением соответствующих коэффициентов или подключением к модели новых блоков;
3. полученные результаты переносятся на исследуемый объект.

При этом к данным, полученным в результате экспериментов с моделями экосистем подходят с большой осторожностью, особенно в случае получения результатов, говорящих о возможности усиления антропогенной нагрузки на экосистему, так как проверка на практике результатов таких модельных экспериментов может закончиться катастрофой.

Таким образом, в экологии, как и в медицине, при использовании полученных результатов применяют главный принцип - "не навреди", т.е. в первую очередь принимают во внимание не «разрешающие», а «запрещающие» выводы.

Приемы физического моделирования экосистем

Необходимость изучения поведения экосистем вызвала к жизни разнообразные методы экспериментирования с природными сообществами. Наиболее развитой системой модельных экосистем оказалась в гидробиологии. Это связано с возможностью создания искусственных микросистем: микрокосмов и мезокосмов (экспериментальных прудов), в которых контролируются условия наблюдений, а условия опыта приближены к природным.

Микрокосмы

В практике экологических исследований микрокосмы применяются с XIX в. Микрокосмы могут существовать различное время. Как относительно "короткоживущие" можно рассматривать микрокосмы создаваемые в аквариуме или небольшой емкости (банке 1,5-2 л). Опыты сводятся к помещению в одном объеме известных количеств хищника и жертвы, различных химических веществ (токсикантов), изменении скорости смены воды, скорости перемешивания воды, интенсивности освещения и последующей регистрации численности популяций через определенные интервалы времени, конкуренции за пищу, смены доминирующих видов водорослей и организмов, колебания видового состава сообществ, закономерности круговорота биогенов и т.д.

Экспериментальные пруды.

Объемы систем, применяемых в качестве экспериментальных прудов, как правило, довольно велики. Это водоемы объемом 20-400 тыс. л. Здесь моделируются как пресноводные, так и морские экосистемы.

В случае моделирования морского сообщества создается, как правило, искусственная емкость, снабженная комплексом обслуживающей техники, которая может состоять из нескольких танков объемом по 10-30 м^3, размещенных возле берега моря и имеющая приспособления для перемешивания, входа и выхода воды, внесения токсикантов, фильтрующей аппаратуры, теплообменников, осветительных устройств и др., которые в целом могут представлять лабораторное здание – "башню". Примером может служить разработанная в МГУ экспериментальная система "ЭТЭКОС".

Экспериментальные пруды применяют в качестве модельных экосистем для решения как фундаментальных, так и прикладных задач. Это обусловлено сохранением естественного состава сообщества благодаря большому объему систем, с возможностью длительного (в течение, например, трех лет) прослеживания за состоянием экосистемы, хорошей воспроизводимостью данных для параллельных бассейнов.

Экспериментальные пруды, как модели, часто используются для прогнозирования экологической ситуации, которая создается после пролития нефти из потерпевшего аварию танкера и, как правило, до деталей соответствует полученным в опытах закономерностям.

Недостатки физических модельных экосистем

Для микрокосмов к недостаткам можно отнести: трудности культивирования в лабораторных условиях многих организмов, ограничения в продолжительности (48-96 ч) экспериментов. Последнее, часто вынуждает применять очень высокие концентрации токсикантов, которые не встречаются на практике. Нередко загрязнитель, изучаемый в лаборатории, химически отличается по форме от того, который действует в природе (в связи с комплексообразованием, адсорбцией и т.п.). Большинство этих недостатков исключается при использовании экспериментальных прудов, где получаемые результаты оказываются более достоверны

Методы прогнозирования воздействия на окружающую среду

Большое разнообразие математических моделей и методик, которые связаны с прогнозированием воздействия жизнедеятельности человека на состояние ОС основано на следующих разделах математики:

1. линейной алгебры, в частности: векторные и матричные преобразования, решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ);
2. дифференциальном и интегральном исчислении (преобразованиях);
3. теории вероятности и математической статистики;
4. корреляционного, регрессионного и факторного анализа.

В связи с этим существующие модели и методы прогнозирования можно разделить на несколько больших категорий:

1. картографические методы;
2. метод контрольных списков;
3. матричные методы;
4. сетевые модели;
5. вероятностно-статистические модели;
6. адаптивные методы;
7. процедуры моделирования с применением линейного и динамического программирования.

Сделаем краткий обзор разработанных в разных странах методов и покажем их применимость для решения задач в области охраны окружающей среды.

Картографические методы

Метод наложения или совмещенного анализа карт

Этот наиболее простой и наглядный метод, предложенный Мак-Харгом, использует набор прозрачных карт (с координатной сеткой и топографией), каждая из них представляет пространственное распределение параметров ОС (например, загрязнение воздуха и почвы, предрасположенность почв к эрозии, промышленная застройка, свалки промышленных и бытовых отходов и т.д.). Этот метод включает следующие этапы:

1. <u>Каждая карта покрывается штриховкой</u>. Обычно используется три градации густоты штриховки. Локализация заштрихованных мест и густота штриховки показывают степень воздействия проекта на выбранный параметр.

2. <u>Путем совмещения отдельных карт получают суммарную картину</u> воздействия проекта на анализируемую территорию.

Обычно совмещают не более 10 карт, чтобы результирующая карта была читаемой. Эффективность метода совмещения повышается при применении ЭВМ. В этом случае параметры задаются в численном виде в узлах некоторой сетки точек. В процессе агрегирования параметрам могут быть приданы некоторые веса в зависимости от их значимости.

Имитационная картографическая модель

Идея наложения карт получила развитие в *имитационной картографической модели*, состоящей из трех блоков карт:

a) *инвентаризационные* – дают общее представление о соотношении хозяйственных и природных объектов на исследуемой территории;
b) *покомпонентные* (оценочные и прогнозные) – предназначенные для изучения влияния хозяйства на отдельные компоненты природной среды;
c) *интегральные* – дают оценку (в баллах) состояния природной среды в целом по изучаемой территории.

Легенда *интегральной* карты представляет собой матрицу, где по вертикали приводятся оцениваемые компоненты природной среды, а по горизонтали – природопользователи, использующие одни и те же компоненты природной среды. В результате анализа интегральных карт-сценариев путем имитационных экспериментов (проигрывания вариантов) создаются карты предложений по рационализации природопользования в регионе.

Картографические методы обладают рядом несомненных достоинств: наглядностью представления, относительной простотой реализации, возможностью определения величины и значимости первичных воздействия.

Недостатками являются – отсутствие идентификации воздействий второго и более высоких порядков.

Метод контрольных списков

Характерным примером метода контрольных списков является метод разработанный в США Ботелле. Этот метод позволяет оценивать действия 78 параметров, разделенных на четыре категории (сферы):

1. сфера экологии – наземные, водные виды и популяции, а также их место обитания;
2. физико-химическая сфера – показатели качества воды, воздуха и почвы;
3. сфера чувственного восприятия – запахи, звуковое и визуальное восприятие;
4. сфера человеческой деятельности (социум), которая включает особенности образа жизни на рассматриваемой территории.

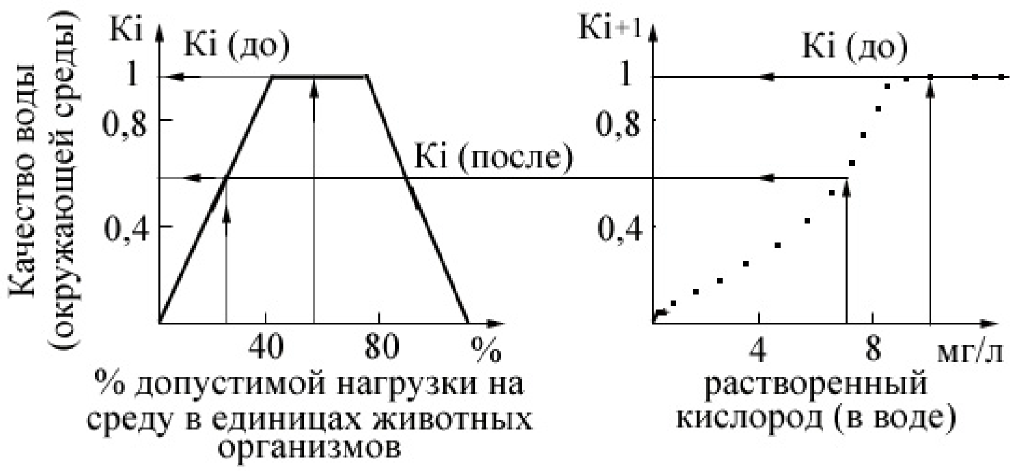


Рис. Примеры «функции значимости»

Каждому из показателей воздействия присваивается вес способом ранжирования (1000 единиц распределяется между всеми параметрами в соответствии с их относительной важностью). Затем, для каждого параметра экспертным путем строится «функция значимости», связывающая значения параметров с качеством окружающей среды, которое задается в баллах в интервале от 0 до 1. Для построения «функции значимости» выполняют следующую процедуру:

1. получают данные о взаимосвязях между параметром и качеством окружающей среды;
2. располагают шкалу параметра (абсциссу) так, чтобы самое низкое ее значение равнялось 0;

3. делят шкалу качества (ординату) на равные интервалы от 0 до 1 и откладывают соответствующие им значения параметра;
4. процедуры 1–3 проделывают независимо друг от друга несколько экспертов, а затем усредняют полученные результаты;
5. процедуры 1-4 проводят для всех параметров.

Используя функции значимости, определяют разницу в нормированных значениях каждого параметра до и после воздействия. Умножив эту разницу на определенный ранее вес параметра, получают его «индикатор воздействия», просуммировав, получают агрегированную оценку воздействия. С помощью агрегированных оценок производится сравнение альтернативных вариантов развития (строительство гидротехнических сооружений, расширение сельскохозяйственных угодий и т.д.):

$$AO = \sum_{i=1}^{78} \left| K_{(до)\ i} - K_{(после)\ i} \right| \cdot G_i$$

Сильной стороной данного метода является то, что он позволяет не только идентифицировать, но и прогнозировать величину воздействия.

Главными недостатками является отсутствие механизма для оценки взаимного влияния между перечисленными в контрольном списке параметрами, а также оценки воздействия более высокого порядка.

Матричные методы. Матрица Леопольда

В матрицах два контрольных списка параметров и воздействий на ОС располагаются вдоль перпендикулярных осей. Это позволяет получить качественную информацию о взаимосвязях типа причина – следствие.

Наиболее известным примером из используемых матриц является матрица Леопольда, в которой:

- по *горизонтали* перечислены 100 различных действий, которые могут влиять на окружающую среду, например: сооружение плотин, переработка полезных ископаемых, полеводство, лесоразведение, сброс сточных вод и т.д.

- по *вертикали* – 88 параметров окружающей среды (качество воды, качество атмосферы, ландшафтный дизайн, размещение отходов и т.д.)

При наличии воздействия на пересечении столбца и строки проставляется два числа в интервале от 0 до 10:

- в *числителе* – величина воздействия;
- в *знаменателе* – значимость воздействия.

Позитивные и негативные воздействия обозначаются соответственно знаком «+» или «-».

Таким образом, с помощью матрицы Леопольда можно наглядно отразить до 8800 взаимодействий, хотя на практике их число колеблется от 25 до 50. Никакие агрегированные индексы как в методе контрольных списков не предусматриваются, поэтому при анализе альтернативных вариантов приходится анализировать большое количество информации.

Преимущества и недостатки. Матрицы типа матрицы Леопольда полезны для оценки воздействия в крупных региональных проектах – они дают обобщенное рассмотрение первичных воздействий на окружающую среду.

Этот метод не требует больших затрат ресурсов. Однако отсутствует возможность прогнозировать воздействия и идентифицировать вторичные воздействия и воздействия более высокого порядка, получать агрегированные оценки. Частично эти недостатки устранены в описанных ниже методах, основанных на свойствах умножения матриц.

Матрица Петерсона

Процедура анализа воздействия, предложенная Петерсоном включает разработку двух матриц *A* и *B*. В матрице *A* определено возможное воздействие 26 элементов каждого из альтернативных вариантов проекта (например, количество заводов без очистки и с биологической очисткой сточных вод, сельскохозяйственные угодья, энергетические установки и т.д.) на 16 параметров окружающей среды (качество поверхностных вод, воздуха, почв, биотические сообщества и т.д.). Далее оценивают воздействие в баллах в интервале от –3 до +3.

В матрице *B* в тех же величинах оценивается воздействие, которое могут оказать измененные под влиянием проекта компоненты природной среды на социальные факторы, например: плотность населения, здоровье, производство продуктов, уровень занятости населения и т.д. всего около 19 факторов.

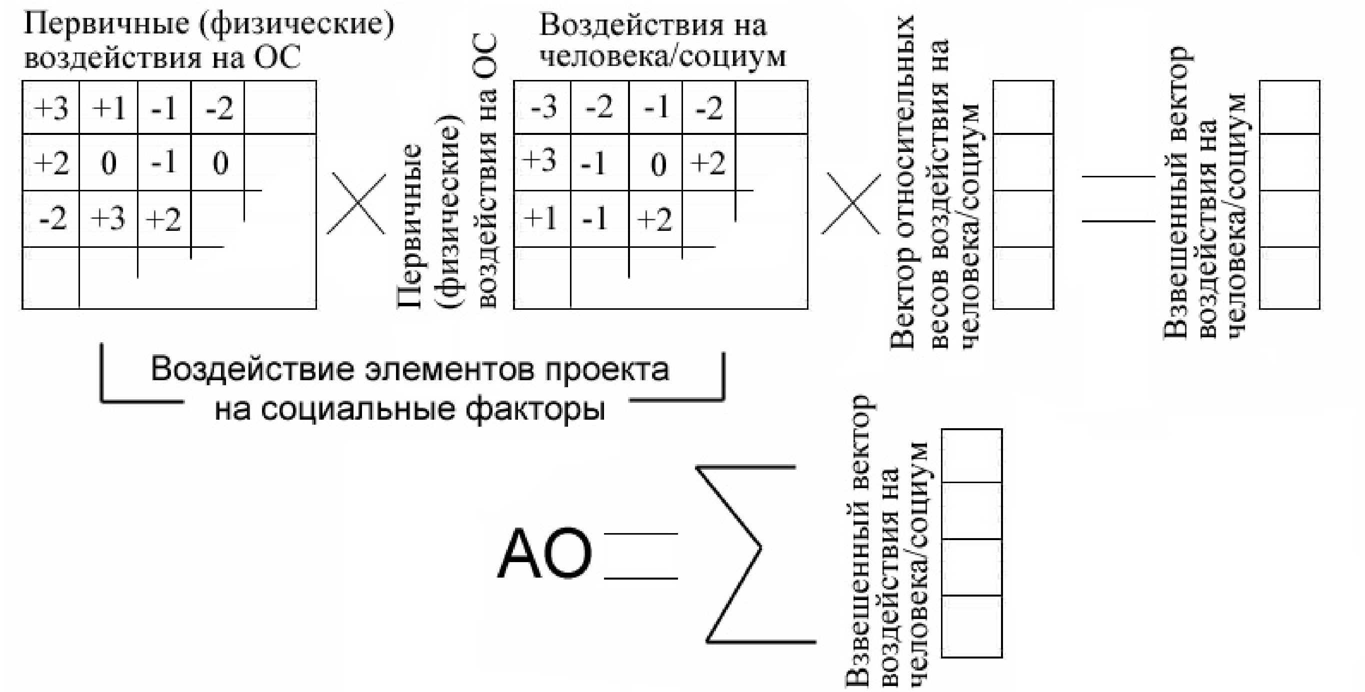


Рис. Схема оценки воздействия с помощью матрицы Петерсона

Таким образом, в матрице *B* оценивают *вторичное воздействие*.

Произведение этих матриц определяет воздействие элементов проекта на социальные факторы. Умножив полученную матрицу на вектор весов значимости социальных факторов получают результирующий вектор-столбец. Далее просуммировав значения результирующего вектора-столбца, получают единую агрегированную оценку воздействия проекта (рис.2), при этом единственной входной информацией является субъективные оценки совета экспертов.

$$\sum\left([A]\times[B]\times\vec{g}\right)=AO$$

Низкая ресурсоемкость метода позволяет проводить интерактивные процедуры оценки на ранних стадиях и вносить необходимые изменения в проект. По агрегированным оценкам сравнивают различные проекты.

Преимущества. Метод позволяет дифференцировать первичные и вторичные воздействия. Вместе с тем он обладает низкой возможностью прогнозирования воздействия и определения риска.

Недостатком является то, что часть информации теряется в процессе агрегирования, а также не учитывается взаимное влияние компонентов друг на друга.

Матрица взаимодействующих компонентов

В этой матрице одни и те же компоненты окружающей среды перечислены по горизонтали и вертикали. Их набор и количество зависят от проекта. Далее:

1. Формируется матрица смежности, т.е., там, где есть прямые зависимости между компонентами, на пересечении строк и столбцов проставляются единицы.
2. Определяют число зависимостей более высокого порядка. Для этого матрицу смежности возводят в степень.
3. Формируют матрицу кратчайших цепей между всеми компонентами. Для этого все ячейки исходной матрицы заполняют целыми числами, указывающими длину кратчайших связей, соединяющих два компонента. Длину выражают числом расположенных между ними узлов.
4. Формируют матрицу нарушений. Для этого анализируют воздействие проекта на цепи зависимостей. В результате, нарушения, которые могут произойти классифицируют по степени в баллах от 0 до 3.
5. Выбирают вариант, который приведет к наименьшему количеству нарушений в цепях зависимостей.

Основной недостаток: определяет только воздействия, но не определяет их важность, т.к. они рассматриваются с одинаковым весом.

Сильная сторона: определение воздействий более высоких порядков.

Сети

Если с помощью матриц можно четко определять наличие связей (первичных или более высокого порядка) между компонентами природной среды, то для количественного изучения направленных воздействий применяют направленные диаграммы, которые называют сетями.

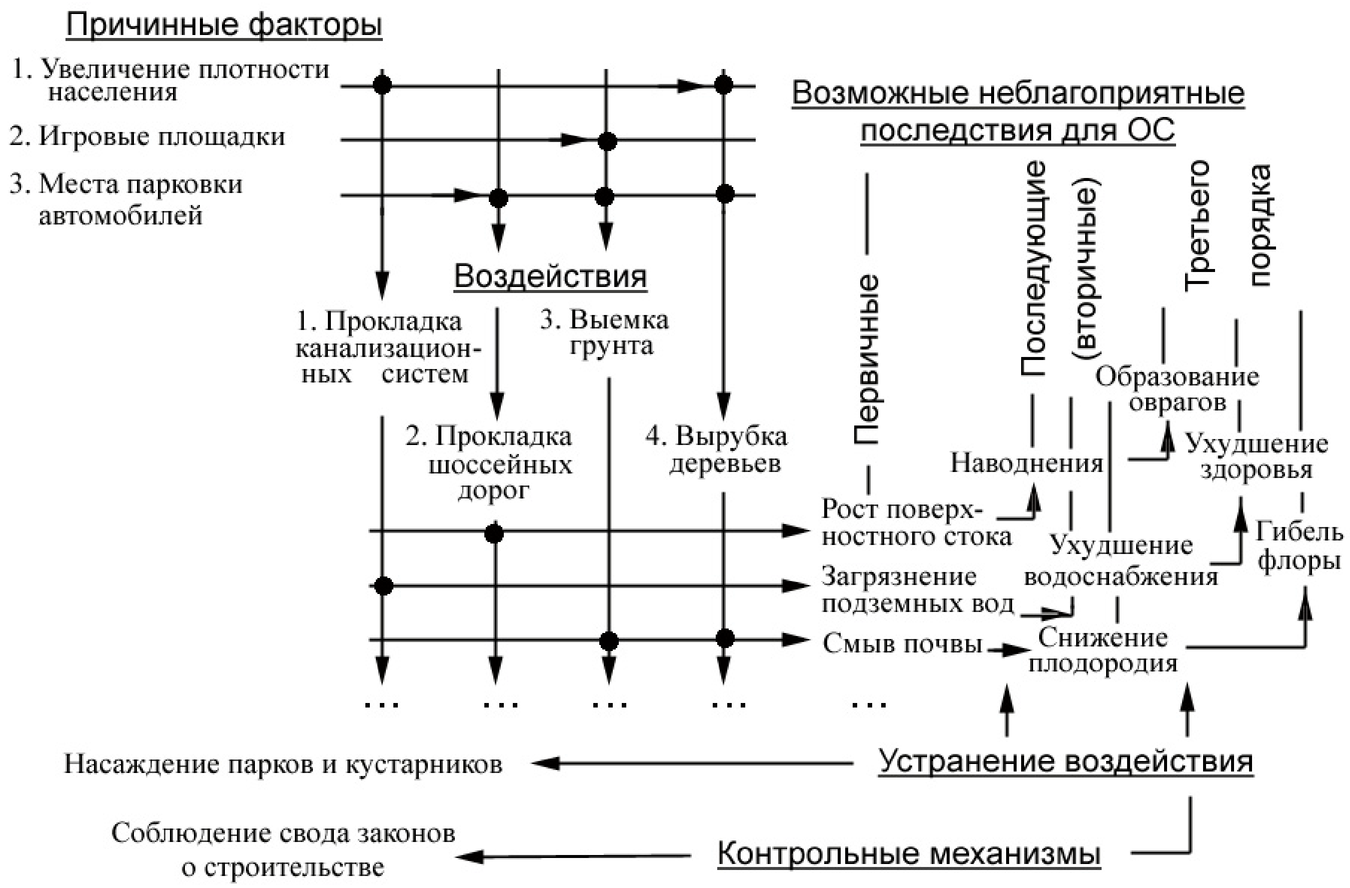


Рис. Часть ступенчатой матрицы Соренсена.
Использование земель под жилищно-коммунальное строительство

Наиболее ранним и известным способом изучения направленных воздействий является <u>ступенчатая матрица Соренсона</u>. Рассмотрим пример-фрагмент этой матрицы. Он показывает, к каким четырем первичным воздействиям могут привести три варианта жилищно-коммунального строительства с причинно-следственными связями для каждого из четырех первичных воздействий.

<u>Основные недостатки:</u> Из-за сложности и громоздкости его применение ограничено третьим порядком воздействий. Воздействия численно не оцениваются, поэтому этот способ не применим для сравнения альтернативных проектов.

<u>Сильная сторона:</u> Наглядно показывает направление и сущность связей разного порядка

Сетевые диаграммы

Развитием ступенчатой матрицы являются сетевые диаграммы. Сетевые диаграммы основаны на энергетических сетевых методах, т.е. компоненты природной среды соединяются сплошными линиями потоков энергии. Их величину выражают в джоулях, децибелах или кюри.

Преимуществом является возможность оценки большого числа воздействий в одинаковых единицах измерения.

Статистические методы

В этих методах для обработки информации используют математический аппарат факторного анализа. С его помощью выполняют сжатие информации. Для характеристики основного воздействия выделяют небольшое число обобщенных показателей-факторов. Обычно выделяют два вида показателей:

1. *показатели потенциальной нагрузки* (плотность населения, урбанизация территории и т.д.);
2. *показатели фактической нагрузки*, отражающие прямое воздействие на природную среду (выбросы и сбросы загрязняющих веществ, распаханность территорий и т.д.).

Далее, чтобы получить плотность нагрузки на территорию, величину показателя относят к площади анализируемого района. Вклад каждого показателя-фактора в суммарную нагрузку оценивается с помощью весовых коэффициентов, в соответствии со следующими критериями:

1. число компонентов природной среды, подвергаемых воздействию;
2. масштаб распространения воздействия;
3. наличие токсичных загрязнителей.

В результате факторного анализа выбирается вариант наименьшей суммарной нагрузки на окружающую среду.

К недостаткам относится то, что математический аппарат факторного анализа не позволяет установить является ли связь между показателями причинной или случайной. Поэтому требуются дополнительные знания об изучаемом явлении и конкретной территории, на которой оно проявляется.

Адаптивные методы

Адаптивные методы предоставляют общий подход к анализу воздействий на ОС и включают процедуру принятия решений, которая основывается на применении ранее рассмотренных методов анализа воздействий. Основная идея этих методов состоит в том, чтобы оценки воздействия являлись составной частью при разработке новых проектов строительства промышленных, жилищно-коммунальных, сельскохозяйственных объектов, их реконструкции и т.д.

Наиболее распространенными адаптивными методами являются: *метод Сондхейма*, *«анализ решений»* и *метод Холлинга*.

Метод Сондхейма

Центральным моментом этой методики является создание трех специальных групп:

1. координационного центра;
2. группы «рейтингов»;
3. группы «взвешивания»;

В обязанности координационного центра входит:

- рассмотрение всех реальных вариантов проектов (строительство, реконструкция и т.д.);
- определение окружающей среды как функции N независимых или условно независимых аспектов. Символически:

$$ОС = f(a_1, a_2, a_3,\dots a_n),$$

где a_i – биологические, физические, химические, климатические и др. четко определенные аспекты.

Каждый из членов группы «рейтинга» является специалистом по одному из N аспектов окружающей среды. Он рассматривает воздействие каждого из M вариантов проекта на данный аспект. Для оценки воздействия используется любой из рассмотренных ранее методов. Таким образом, формируется матрица рейтингов (P_{MN}) со стандартными значениями размерностью M x N:

$$P = \begin{matrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{1N} & \leftarrow 1-\textit{й проект} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{2N} & \leftarrow 2-\textit{й} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{3N} & \leftarrow 3-\textit{й} \\ P_{M1} & P_{M2} & P_{M3} & P_{MN} & \leftarrow 4-\textit{й} \end{matrix}$$

В группу «взвешивания» входят представители из правительственных, общественных, промышленных кругов. Эти люди не обязательно эксперты, но ознакомлены с предполагаемыми проектами.

То же самое, что и в группе «рейтинга» выполняют каждый представитель группы «взвешивания», но оценки в данном случае сугубо субъективные, т.к. никакие объективные процедуры для оценки не используются. Результатом является матрица весовых оценок также размерностью M x N:

$$B = \begin{matrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{1N} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{2N} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{3N} \\ B_{M1} & B_{M2} & B_{M3} & B_{MN} \end{matrix},$$

где здесь N – число членов группы «взвешивания».

На этом этапе, координационный центр должен следить, чтобы оценки группы «взвешивания» не преобладали над оценками группы «рейтинга».

Далее:

1. Отдельные соответствующие элементы, полученных матриц P и B перемножаются между собой, например, для элементов P_{ij} и B_{ij}

$$C_{ij} = P_{ij} \cdot B_{ij}$$

2. После умножения, получается новая матрица C той же размерности, что и исходные, которая стандартизируется и сокращается до вертикальной матрицы путем сложения по строкам.
3. Проводится сортировка в порядке убывания сумм, т.е. в порядке предпочтительности проектов.

Положительная сторона:

1. позволяет одновременно рассматривать любое количество альтернативных проектов;
2. возможность легко перебирать альтернативные проекты;
3. возможность гибко включать в альтернативные проекты различные компоненты природной среды;
4. возможность включения мнения общественности;
5. гибко согласовывать оценки от группы «рейтинга» с весами от группы «взвешивания».

Недостатком этого метода является то, что при разработке схемы рейтингов не накладываются никакие условия на взаимодействия между отдельными аспектами природной среды.

Анализ решений

Этот способ применяют, когда рассматриваемый проект должен удовлетворять нескольким критериям, основными, из которых являются:

a) минимум негативных социально-экономических эффектов;
b) максимум безопасности населения;
c) минимум отрицательных экологических эффектов.

Таким образом, этот способ сводится к задаче многокритериальной оптимизации. Часто критерии представляют в стоимостной форме. При этом многие факторы, не имеющие стоимостного эквивалента, остаются неучтенными.

Для решения подобных задач был разработан метод получивший название «анализ решений». В его основу положено применение «функции полезности».

Суть метода состоит в том, что с помощью специальных процедур разнородные свойства объекта оценивают единым измерителем – «полезностью». Функции «полезности» по специальным методикам определяются группой экспертов. С помощью этих же методик оценивают вероятность достижения целей по отдельным критериям. Показателем предпочтительности того или иного варианта является многокритериальная функция полезности:

$$U(x) = \sum_{i=1}^{N} \left[U(x_i) \cdot P(X = x_i) \right],$$

где: $U(x_i)$ – функция полезности по отдельным критериям N;

$P(X = x_i)$ – вероятность достижения целей по этим критериям.

Этот метод нашел применение в нашей стране при разработке рекомендаций по выбору площадок для размещения атомных станций.

Достоинством этого метода является возможность не только прогнозировать воздействия на окружающую среду, но и вырабатывать рекомендации по достижению поставленных целей оптимизации критериев.

Метод Холлинга

В основу этого метода положен системный подход, опирающийся на междисциплинарные исследования достаточно крупного коллектива разнородных специалистов. Работа междисциплинарной группы начинается со сбора данных о других системах влияющих на рассматриваемую подсистему. Этот процесс аналогичен работе с матрицей «взаимодействующих компонентов».

Промежуточные и конечные результаты работы междисциплинарной группы применяют к задачам прогнозирования воздействия. При этом предсказание воздействия не является самоцелью, а оценка воздействия сливается с адаптивным управлением окружающей средой. Благодаря этому методу учитывается влияние неопределенности и изменчивости экосистем.

Наиболее полезным для предсказания и выработки рекомендаций по адаптивному управлению являются количественные имитационные модели, которые будут рассмотрены далее.

Имитационно-оптимизационные модели

Модели этого типа являются наиболее распространенными для реализации принципов *системного анализа* и охватывают модели, математический аппарат которых позволяет решать задачи оптимального управления моделируемым объектом. Они применяются при решении проблем взаимодействия природы и общества. Их построение основано на использовании методов линейного и динамического программирования при исследовании систем, которые описаны через *системы линейных алгебраических* (СЛАУ) и/или *дифференциальных* уравнений.

Другим видом оптимизационных моделей являются модели, построенные с помощью *теории игр* и в общем случае, исследуются статистическими методами.

В качестве примера, рассмотрим многоуровневую модель, описывающую взаимодействие экологических и экономических систем. В общем виде такая модель должна включать следующие блоки:

1. Блок межотраслевого баланса (МОБ);
2. Блок динамики природных ресурсов (ДПР);
3. Блок принятия управленческих решений (ПУР).

Главной целью (решением) этой модели является устранение проблемных ситуаций, связанных с принятием решений, эффективных с точки зрения сегодняшнего дня, но не эффективных для будущего. Модели этого типа обладают достаточной сложностью и включают как СЛАУ, так и системы уравнений в интегральной и дифференциальной форме.

Блок МОБ (межотраслевого баланса) представлен многоотраслевой моделью Леонтьева в виде СЛАУ. Межотраслевой баланс в экономике, как известно, — это метод анализа взаимосвязей между различными секторами экономической системы.

Предположим, что исследуемую эколого-экономическую систему можно разделить на несколько отраслей (секторов), производящих определенные товары и услуги (сельское хозяйство, промышленность, транспорт, энергетика и т.п.). При производстве товаров и услуг в каждом секторе расходуются ресурсы в виде сырья, рабочей силы, оборудования и др., которые производятся как в данном секторе экономики, так и в других секторах. Это означает, что каждый сектор выступает в системе межотраслевых связей одновременно производителем и потребителем.

Кроме полезного продукта по каждому сектору экономики происходит образование и выброс загрязняющих веществ в окружающую среду, количество которых можно представить через удельные величины, например, приходящиеся на 1-цу выпуска каждого вида продукции.

Цель балансового анализа — определить сколько продукции должен произвести каждый сектор для того, чтобы удовлетворить все потребности экономической системы в его продукции и, при этом, не нарушить установленных норм выбросов вредных веществ в окружающую среду.

Рассмотрим упрощенную модель межотраслевого баланса — баланс экономики, состоящей из трех секторов — сельского хозяйства, промышленности и домашних хозяйств. В качестве единицы измерения объемов товаров и услуг каждого сектора выберем их стоимость.

Предположим, что вся продукция сельского хозяйства составляет 200 денежных единиц, из них 50 единиц потребляется внутри самого сектора, 40 единиц — в промышленности и 110 — в домашних хозяйствах.

Таблица межотраслевого баланса для простейшей эколого-экономической модели региона

	Сельское хозяйство	Промышленность	Домашние хозяйства	Общий выпуск
Сельское хозяйство	50	40	110	200
Промышленность	70	30	150	250
Домашние хозяйства	80	180	40	300
Затраты	200	250	300	

Продукция промышленности составляет 250 единиц, из них 70 единиц потребляются в сельскохозяйственном производстве, 30 — в секторе промышленности и 150 — в домашних хозяйствах.

Домашние хозяйства производят 300 единиц продукции, из них 80 единиц потребляются в сельском хозяйстве, 180 — в промышленности и 40 — внутри самого сектора. Эти данные сведены в таблицу межотраслевого баланса.

Числа, расположенные в строках таблицы, показывают, как распределяется произведенная продукция каждого сектора, последний элемент строки — объем произведенной сектором продукции (общий выпуск). Данные, расположенные в столбцах показывают, какую продукцию потребляет каждый сектор в процессе производства, последнее число в столбце — суммарные затраты сектора. Из таблицы видно, что все секторы являются производящими, при этом вся произведенная продукция потребляется в различной степени этими же производящими секторами. Такая модель межотраслевых связей называется *замкнутой*. В замкнутой модели объем затрат каждого сектора (сумма элементов в столбце таблицы) равен объему произведенной продукции (сумма элементов в соответствующей строке).

Таблицы межотраслевого баланса описывают потоки товаров и услуг между секторами экономики в течение фиксированного промежутка времени, например в течение квартала, полугодия или года. Такие данные, сохраняемые в таблицах, естественно описывать и анализировать в терминах матричной алгебры.

Для рассмотренного примера замкнутой экономической системе баланс между совокупным выпуском и затратами каждого сектора можно описать равенствами:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}, \qquad k = 1, 2, \dots, n,$$

где b_{kj} (b_{ik}) – количество товаров и услуг k-го (i-го) сектора экономики, потребляемого в j-м (k-м) секторе.

Матрица $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ называется *матрицей межотраслевого баланса* (или *матрицей Леонтъева*).

На практике экономика области или региона представляет собой *открытую* систему межотраслевых связей, в которой вся произведенная продукция (совокупный продукт) разделяется на две части: одна часть продукции (промежуточный продукт) идет на потребление в производящих секторах, а другая ее часть (конечный продукт) потребляется вне сферы материального производства — в секторе конечного спроса и восстановления природных ресурсов. При этом потребление в секторе конечного спроса и восстановления природных ресурсов может меняться. Для открытой системы межотраслевой баланс будет иметь вид:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} + y_i \quad \text{или} \quad x_i = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} \cdot x_j\right) + y_i \quad \text{или} \quad x_i - \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} \cdot x_j\right) = y_i$$

$$\text{для } i = 1,2,\ldots n$$

или в виде СЛАУ:

$$\left(E - A\right) = Y$$

или в развернутом виде:

$$\begin{cases} \left(1 - a_{11}\right) \cdot x_1 - a_{12} \cdot x_2 \ldots - a_{1n} \cdot x_n = y_1 \\ - a_{21} \cdot x_1 + \left(1 - a_{22}\right) \cdot x_2 \ldots - a_{2n} \cdot x_n = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ - a_{n1} \cdot x_1 - a_{n2} \cdot x_2 \ldots + \left(1 - a_{nn}\right) \cdot x_n = y_n \end{cases} \tag{2.1}$$

где $X=x_i$ - объем выпуска i-го сектора (объем товаров и услуг, произведенных в одном из n производящих секторов), $i = 1, 2, ..., n$;

$Y=y_i$ — конечный продукт i-го сектора (объем продукции i-го сектора, потребляемой в секторе конечного спроса);

$A=a_{ij}=b_{ij}/x_j$ — количество продукции i-го сектора, которое расходуется при производстве единицы продукции j-го сектора (*коэффициенты прямых затрат*).

b_{ij} — объем товаров и услуг i-го сектора, потребляемых в j-*м* секторе;

Приведенное равенство описывает технологию производства и структуру экономических связей и означает, что в сектор конечного спроса от каждого производственного сектора поступает та часть произведенной продукции, которая остается после того, как обеспечены потребности производящих секторов.

Предположим, что в течение некоторого промежутка времени коэффициенты прямых затрат a_{ij} остаются постоянными, а конечный спрос изменяется. Это означает, что существует линейная связь между выпуском и затратами и изменение выпуска хотя бы в одном секторе экономики влечет за собой пропорциональное изменение затрат всех производящих секторов. Коэффициентами пропорциональности этой связи являются элементы структурной матрицы. То есть в линейной модели "затраты — выпуск" соотношения баланса описывают связь неизвестного выпуска с заданным спросом. Эти соотношения позволяют определить, каким должен быть совокупный выпуск в каждом секторе, чтобы удовлетворить изменившиеся потребности общества.

В экономической системе с заданной структурной матрицей A спрос всегда удовлетворяется, если для любого вектора спроса Y существует вектор выпуска $X=Y(E—A)^{-1}$, все компоненты которого неотрицательны. Доказано, что для этого необходимо выполнение условий Хаукинса—Саймона:

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 1-a_{nn} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1,n-1} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \dots & 1-a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} > 0, \dots \quad \begin{vmatrix} 1-a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$1-a_{11} > 0,$$

т.е. если сумма элементов столбцов структурной матрицы A не превышает единицы $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1, \quad j=1,2,...,n$ и хотя бы одна из этих сумм строго меньше единицы (существует такое k в пределах $1 \le k \le n$, что $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} < 1,$), то элементы d_{ij} матрицы $(E—A)^{-1}$ неотрицательны $d_{ij} \ge 0$.

Далее если обозначить общий объем загрязняющего вещества через Z, то для расчета загрязнения окружающей среды каждым сектором и всеми одновременно необходимо дополнить систему уравнений (2.1) еще одним балансовым уравнением:

$$Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n,$$

где c_i – нормы выбросов вредного вещества на единицу продукции x_i каждого сектора.

Объемы выпуска и потребления продукции X и Y, а также объемы загрязняющего вещества Z, в качестве входных управляющих воздействий входят в блок ДПР (динамики природных ресурсов). Этот блок представлен системой однородных дифференциальных уравнений, которые являются функциями следующих параметров:

$$\frac{dR_j}{dt} = f\left(R_j^*, X, Y, Z, D_p, D_r, Q, E_f, I, u, w, r^e, r^i, \alpha, N_s\right), \qquad j = 1 \ldots 8$$

где: R^*_j, R_j – векторы значений природных ресурсов до и после воздействия;

Q – матрица скоростей самовосстановления и взаимовлияния ресурсов;

E – матрица эффективности изъятия природного ресурса, необходимого для производства единицы продукции (матрица удельных ресурсных затрат);

D_p, D_r – матрицы удельных производственных и ресурсовосстанавливающих фондовых затрат;

I – диагональная матрица-индикатор роста биологических ресурсов;

α – вектор влияния населения этого региона на природные ресурсы;

N_s – численность населения рассматриваемого региона;

u, w – вложений в производство и восстановление;

r^e, r^i – векторы перетоков ресурсов (экспорт, импорт) между выделенными районами.

В блоке ДПР (динамики природных ресурсов) рассматриваются следующие природные ресурсы:

R_1 – удельные концентрации загрязнителей воды;

R_2 – удельные концентрации загрязнителей воздуха;

R_3 – средний бонитет почв; R_4 – площадь сельскохозяйственных угодий;

R_5 – площадь лесопокрытой зоны; R_6 – общая продуктивность леса;

R_7 – запасы полезных ископаемых; R_8 – приведенные запасы биологического ресурса.

В модели значительное внимание уделяется оценке первоначальных (невозмущенных) состояний и идентификации параметров. Блок ДПР (динамики природных ресурсов) является ядром системы моделей. В этом блоке под действием векторов управляющих воздействий экономики (X, Y, Z, u, w), происходит прогнозируемое на заданный момент времени t изменение ресурсов. Расчет этих изменений достигается интегрированием системы дифференциальных уравнений на ЭВМ по методу Эйлера (или Рунге-Кутта) с автоматическим выбором шага.

Блок ПУР (принятия управленческих решений) производит контроль каждого прогнозируемого в момент времени t значение j-го ресурса, сравнивая его со значением в невозмущенном состоянии:

$$\varepsilon_j = \left| \sqrt{\sum_{i=t_{k+1}}^{T} \frac{\left(R_{ji} - R_j^*\right)^2}{T - t_k}} \right| \qquad j = 1 \ldots 8$$

где: ε_j – вектор среднеквадратических отклонений прогноза от первоначального (невозмущенного) состояния для всего множества ресурсов;

t_k и T – моменты времени, соответствующие концу временного ряда R_{ji} и концу интервала прогнозирования.

Далее для каждого варианта прогноза производится вычисление следующей оценки:

$$P_n = \sum_{j=1}^{8} \omega_j \cdot \varepsilon_j$$

где: ω_j – введенный экспертно вес j-го ресурса, характеризующий его важность, при этом каждый вес $\omega_j < 1$, а их сумма $\sum_{j=1}^{10} \omega_j = 1$. Критерием допустимого варианта решения является условие:

$$P_n < P^*,$$

где: P^* – критическое значение.

На основании этого условия формируется множество допустимых вариантов. Окончательный выбор приемлемого варианта развития природно-экологического комплекса происходит по критерию минимума суммарной мощности ресурсовосстановительных отраслей, входящих в МОБ:

$$\sum_{j=1}^{8} V_j^m \to \min,$$

где: V_j^m – производственная мощность ресурсовосстановительных отраслей в m–м варианте развития (в стоимостной форме).

Модели, использующие концепцию базы знаний

Информация об объекте (физическом, химическом, биологическом, социальном), собираемая в процессе моделирования сама, по сути дела, является моделью этого объекта. Подход к информации как к модели реального объекта, который позволяет вскрыть тенденции и общие формы законов, заложен в основу региональной экологической модели (РЭМ). Цели, которые преследует РЭМ:

1. оценка текущего состояния природной среды;
2. прогноз изменений ее состояния с последующей оценкой.

Такие задачи решаются либо достаточно крупным коллективом разнородных специалистов, как в методе Холлинга, либо с помощью мощных средств автоматизации процессов обработки информации, наделенных чертами искусственного интеллекта.

Вся информация о регионе скапливается в интеллектуальном банке данных (ИБД), состоящим из четырех баз:

1. базы знаний (БЗ);
2. базы данных (БД);
3. банка моделей (БМ);
4. базы имитации (БИ).

Особенностью РЭМ как системы искусственного интеллекта заключается в ее системе представления знаний, опирающейся на ИБД. Знания о предметной области представлены в виде фреймов, т.е. наборов баз структурированных данных с внутренними связями между собой. С помощью возможностей, которые предоставляет РЭМ можно выполнять следующее:

1. осуществлять поиск необходимой информации о регионе;
2. изменять ИБД, т.е. создавать новые связанные информационные структуры данных. К этой группе запросов относятся, например, запрос «построить правило классификации для набора данных по нескольким классам». Эти запросы связаны с распознаванием образов;

3. вырабатывать текущие оценки состояния природной среды. Выходной информацией является оценка, выполненная для заранее заданного состояния окружающей среды или синтезированная с помощью базы знаний;
4. выполнять запросы прогнозного характера. Эти запросы связаны с автоматическим изменением информации в РЭМ, при этом законы по которым изменяется информация, не заданы в виде формальных выражений: одна часть информации получается по эмпирическим данным, другая часть информации – меняется в соответствии с эвристическими правилами, заложенными в базу данных. Прогноз получают, проводя многократные имитационные эксперименты. В этом случае, прогноз носит вероятностный характер.

<u>Положительная сторона</u> этих моделей заключается в возможности набрать большую статистику по модельным прогнозам и сделать статистически обоснованные выводы. При этом РЭМ как система искусственного интеллекта содержит не только знания, заложенные в нее разработчиками, но и генерирует новые путем многократных сопоставлений различных фактов, которыми она оперирует.

Логико-информационные модели

Появление логико-информационных моделей (ЛИМ), связано с попыткой создания в экологии аналога математически хорошо проработанного раздела механики такого, как сопротивление материалов. Назначение ЛИМ заключается в следующем:

1. оценивать реальную экосистему «на прочность» при проектировании возможных изменений ее структуры;
2. прогнозировать последствия увеличения внешних нагрузок на экосистему.

В основе ЛИМ лежит понятие ***«функционирующего элемента» (ФЭ)***.

ФЭ – это вектор (A_i), компонентами которого являются потребности в природных ресурсах и виды производимых ресурсов:

$$A_i = f\left(M_i, C_{ij}, \dots C_{ik}, P_{ij}, \dots P_{ik}\right), \qquad j = 1 \dots k$$

где: $C_{ij \dots k}$ – потребление i-м ФЭ ($j \dots k$)-го природного ресурса;

$P_{ij \dots k}$ –удельное производство ($j \dots k$)-го ресурса i-м ФЭ;

M_i – мощность i-го ФЭ;

$M_i \cdot C_{ij} \dots M_i \cdot C_{ik}$ – общее количество ($j \dots k$)-го ресурса, потребляемого i-м ФЭ;

$M_i \cdot P_{ij} \dots M_i \cdot P_{ik}$ – общее количество ($j \dots k$)-го ресурса, производимого i-м ФЭ.

В качестве *функционирующих элементов* рассматриваются:

1. группы людей с одинаковыми нормами потребляемых и производимых ресурсов;
2. объекты промышленности, транспорта, сельского и коммунального хозяйства;
3. природные объекты.

Под функционированием природных объектов (R_h) подразумевают изменение их состояния, которое происходит за счет антропогенных нагрузок. Учитывается только два режима функционирования элементов – нормальный и выход из строя, которым соответствуют 0 и 1. Каждый h-й ФЭ природных объектов характеризуется вектором состояний через функцию определенных параметров (x):

$$R_h = f\left(A_h, x_1, x_2, \dots x_{Nh}\right), \qquad h = 1, 2, \dots, m$$

где: m – число рассматриваемых ФЭ природных объектов;

N_h – число параметров состояния h-го элемента.

Параметры x_l ($l = 1...N_h$) разбиваются на четыре группы:

1. управляющие воздействия, которые выражают взаимосвязи в экосистеме и их можно изменить искусственно;
2. возмущающие воздействия – изменения экологических параметров, природных и климатических характеристик, изменение спроса на ресурсы;
3. входные переменные – изменение мощностей ФЭ;
4. выходные параметры – требуемые ресурсы в экосистеме, на которые имеются ограничения.

При последовательном включении элементов в модель получают математическую модель в виде графа, вершинами которого являются элементы экологической системы, а множество сигналов, посредством которых элементы взаимодействуют между собой, образуют множество дуг графа.

При реализации модели на ЭВМ задача решается рекурсивным методом в диалоговом режиме. Задача считается решенной, когда на очередной итерации принимается решение, при котором обеспечивается нормальное функционирование всех звеньев системы. При этом окончательное решение принимает эксперт.

Известной ЛИМ является модель, разработанная для создания автоматизированной системы управления развитием и функционированием рекреационной системы Крыма (АСУ РСК). С помощью ее проводились прогнозные оценки различных вариантов организации рекреационного процесса, и выбран оптимальный вариант развития.

Обзор разработанных в различных странах методов и моделей оценки воздействия на окружающую среду хозяйственной деятельности человека показывает, что для получения наиболее полного адекватного прогноза, модель должна удовлетворять следующим критериям:

1. обеспечивать возможность идентификации первичных воздействий и воздействий более высоко порядка;
2. определять величину и значимость воздействия;

3. определять взаимодействия между воздействиями, включая эффекты суммации и эффекты нейтрализации;
4. обеспечивать учет неопределенности и риска;
5. обеспечивать возможность учета социальных и экономических эффектов;
6. включать в оценки общественное мнение;
7. обеспечивать возможности расчета агрегированных оценок;
8. прогнозировать воздействия;
9. осуществлять адаптацию оценок в процессе принятия решения.

Таким образом, чтобы получить более или менее объективную картину воздействия на окружающую среду с помощью методов и моделей, основанных на экспертных оценках, а значит обладающих некоторой долей субъективизма, необходимо их комбинировать в различных вариантах.

Применение дифференциальных уравнений для моделирования экологических систем

Методы теории дифференциальных уравнений являются наиболее эффективными для создания математических моделей, которые описывают динамику экосистем, учитывая взаимодействие, как между отдельными элементами экосистемы, так и между элементами экосистемы и внешними факторами среды, в которой функционирует каждый элемент экосистемы. Поэтому, возможности дифференциальных уравнений, как аппарата моделирования очень велики, поскольку получаемые уравнения могут описывать разные виды динамики биологических и экологических процессов. Остановимся на некоторых основных понятиях и методах теории дифференциальных уравнений и их применении для создания и исследования математических моделей.

Одним из основных понятий является *касательная* к точке кривой $y = f(x)$, т.е. такая прямая, которая имеет с кривой одну общую точку при бесконечном приближении к ней. Тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс, или *динамика изменения* интересующего параметра определяется следующим равенством:

$$tg(\alpha) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

где величина Δy называется приращением (изменением) функции при приращении (изменении) ее аргумента на величину Δx.

Представленное уравнение показывает возможность применения касательной для описания динамики различных природных процессов. Например, если пройденный телом путь S задан как функция времени τ, то скорость движения тела (его динамика) в любой момент времени определяется как касательная или производная для искомого момента времени:

$$V = \lim_{\Delta \tau \to \infty} \frac{\Delta S}{\Delta \tau} = \frac{dS}{d\tau}$$

Один из вопросов, который часто возникает в современной экологии, состоит в следующем: как определить численность той или иной популяции через определенное время? Ответ на него представляет большое теоретическое и практическое значение, например, без него нельзя планировать эксплуатацию возобновляемых природных ресурсов – промысловых рыб, охотничьих угодий, лугов и т.д. В решении этого вопроса может помочь математические методы теории дифференциальных уравнений. Рассмотрим несколько моделей, которые проиллюстрируют подходы к решению этих вопросов.

Простейшая модель "Динамика популяций"

Классический пример наиболее простой задачи развития численности популяции сформулирован в виде модели "Динамика популяций" следующим образом. В благоприятных условиях (нет ограничения в корме и пространстве обитания) находится некоторая популяция (сообщество особей одного вида), которая имеет в момент времени t_0=0 биомассу x_0. В результате длительных наблюдений установлено, что в каждый момент времени скорость увеличения биомассы популяции пропорциональна уже имеющейся биомассе (т.е. популяция экспоненциально размножается $x_+ \approx \exp(t)$), а возникающие явления отмирания (самоотравления) снижают биомассу пропорционально квадрату наличной биомассы (т.е. особи вымирают больше чем они старше $x_- \approx \frac{1}{t}$). Обозначим биомассу в момент времени *t* через *x(t)*, а ее изменение за время *Δt* через *Δx*, тогда можно записать следующее приближенное равенство:

$\Delta x_+ \approx k \cdot x \cdot \Delta t$ – увеличение биомассы за счет прироста, через промежуток *Δt*;

$\Delta x_- \approx -\alpha \cdot x^2 \cdot \Delta t$ – уменьшение за счет отмирания, через промежуток *Δt*.

В результате получаем:

$$\Delta x \approx \Delta x_+ + \Delta x_-$$

$$\Delta x \approx \left(k \cdot x - \alpha \cdot x^2\right) \cdot \Delta t,$$

где α и k – постоянные скорости отмирания и прироста биомассы.

В дифференциальной форме это же соотношение имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x - \alpha \cdot x^2 \qquad (3.1)$$

Это уравнение представляет собой математическую модель процесса изменения биомассы популяции во времени. Теперь для того чтобы найти, какова биомасса популяций будет в определенный момент *t*, необходимо либо дождаться этого момента и непосредственным измерением определить ее (хотя возможно, это не всегда можно реально осуществить), либо воспользоваться полученной математической моделью. Естественно, мы изберем второй путь.

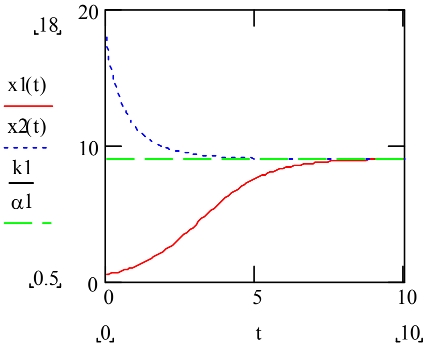
Вначале разделим переменные в уравнении (3.1), и запишем его в интегральной форме при начальном условии $x(t_0)=x_0$:

$$\int_{x_0}^{x1} \frac{dx}{x \cdot (k - \alpha \cdot x)} = \int_0^{t1} dt \qquad (3.2)$$

В результате интегрирования получим окончательный вид удобный для составления прогнозов:

$$x(t) := x_0 \cdot k \cdot \frac{\exp(t \cdot k)}{(k - \alpha \cdot x_0 + x_0 \cdot \alpha \cdot \exp(t \cdot k))}$$

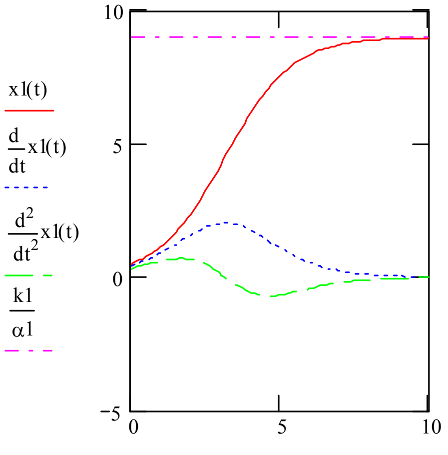
Проведем исследование полученного уравнения модели "Динамика популяций".



Удобным средством экспресс - исследования является графическое представление функций. Однако, график, хотя и является важным и эффективным вспомогательным средством исследования кривой, позволяет сделать только качественный анализ поведения кривой (или поверхности). Для того чтобы узнать числовые характеристики каких-либо интересующих экстремальных или произвольных точек, приходится прибегать к аналитическим методам исследования.

Одним из важных моментов в задачах прогноза является определение состояния явления при бесконечно большой длительности его протекания. С помощью предела находим количество биомассы при бесконечно большой длительности ее существования при заданных условиях:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) \to \frac{k}{\alpha}$$



На рисунке выше видно, что отношение $\frac{k}{\alpha}$ является важным для экосистемы и определяет ее ***емкость***. Не зависимо от начального уровня популяции, ее численность со временем так изменится (в одном случае за счет преобладания процесса размножения над отмиранием, в другом – наоборот), что будет соответствовать емкости среды.

Следующим важным прикладным вопросом является вопрос: когда и сколько без ущерба собирать "урожая" с рассматриваемой популяции, т.е. изымать часть биомассы из экосистемы, чтобы суммарный урожай был бы максимален. Чтобы получить на него ответ, необходимо выяснить существование экстремума скорости прироста биомассы, а для этого находим ее предельное значение, как:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt} x_1(t) \to 0$$

Момент времени t_m, когда скорость прироста биомассы максимальна, находим из решения следующего уравнения:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0 \qquad \rightarrow \qquad t_m = \frac{\ln\left[\frac{(k - \alpha \cdot x_0)}{\alpha \cdot x_0}\right]}{k}$$

Полученный результат таков (см. пример выполнения): начиная с этого момента t_m необходимо вести непрерывный сбор урожая, поддерживая величину биомассы популяции не выше значения, которое получаем из решения относительно x_0:

$$\frac{\ln\left[\frac{(k - \alpha \cdot x_0)}{\alpha \cdot x_0}\right]}{k} = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_0 := \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{\alpha}$$

Теперь рассмотрим ситуации, когда одна популяция взаимодействует с другими популяциями. Учет этого обстоятельства значительно усложняет модель. Рассмотрим одну из таких моделей.

Модель "Хищник-жертва"

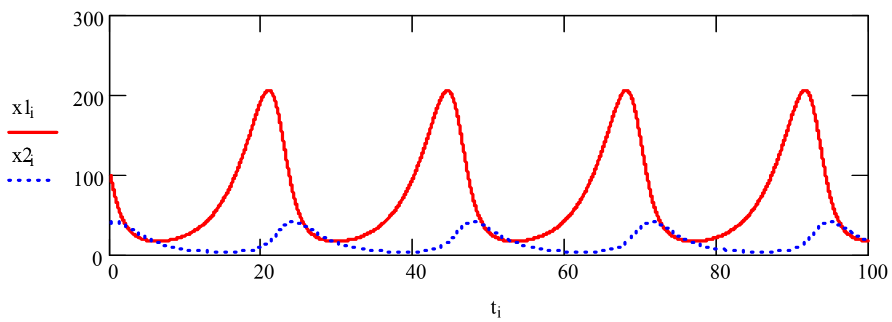
В биологии и экологии многие модели развития популяций описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Поскольку популяции нескольких видов, как правило, оказывают влияние друг на друга, возникают связанные системы дифференциальных уравнений, как, например, в классической модели Вольтерра - Лотка "Хищник - жертва".

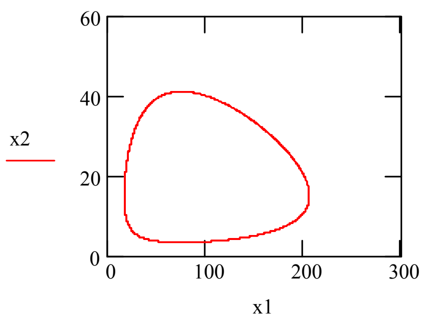
В этой модели животные - жертвы $x_1(t)$ при отсутствии хищников размножаются с коэффициентом приращения g, а животные - хищники $x_2(t)$ при отсутствии добычи (животных - жертв) вымирают с коэффициентом s. Благодаря встречам жертв с хищниками (вероятность встречи пропорциональна произведению обеих популяций) количество животных - жертв уменьшается (с коэффициентом a), а количество хищников возрастает (с коэффициентом b). Это описание явления приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1(t) = g \cdot x_1(t) - a \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) = -s \cdot x_2(t) + b \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \end{cases} \tag{3.4}$$

Таким образом, в модели предполагается, что при отсутствии хищников численность жертв возрастала бы экспоненциально с коэффициентом *g*. При отсутствии добычи хищники вымирали бы также в соответствии с экспоненциальным законом и коэффициентом *s*. Параметр, описывающий уменьшение численности жертв через вероятность их встреч с хищниками, примем равным a=0.02. Теперь, чтобы начать биологическую игру, зададим начальные значения количества животных, например, начальная популяция животных - жертв составляет 100 особей, а хищников - 40.

Поиск решения явной (разрешенной относительно старшей производной) системы дифференциальных уравнений (3.4) можно выполнить при помощи стандартного численного метода интегрирования, например, Рунге-Кутта.





Полученный на рисунке результат показывает, что процесс имеет колебательный характер. Вначале хищники уничтожают много животных-жертв, популяция жертв не успевает восстанавливаться. Уменьшение количества пищи через некоторое время начинает сказываться на популяции хищников, и, когда число жертв достигает величины $x_1 = \frac{s}{b} = 75$ (в этой точке $\frac{dx_2}{dt} = 0$) число хищников тоже начинает сокращаться вместе с сокращением жертв.

Сокращение популяции происходит до тех пор, пока число хищников не достигнет величины $x_2 = \frac{g}{a} = 15$ (в этой точке $\frac{dx_1}{dt} = 0$). С этого момента начинает расти популяция жертв; через некоторое время пищи становится достаточно, чтобы обеспечить прирост хищников, обе популяции растут, и процесс повторяется снова и снова.

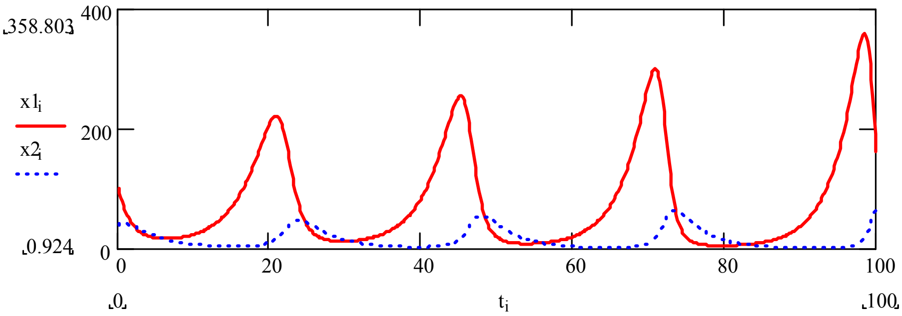
На графике четко виден периодический характер процесса. Количество жертв и хищников колеблется возле величин $x_1 = 75$ и $x_2 = 15$. Периодичность процесса явственно видна на фазовой плоскости: фазовая кривая $(x_1(t), x_2(t))$ — замкнутая линия (см. пример выполнения). Самая левая точка этой кривой, $x_2 = 15$ — это точка, в которой число жертв достигает наименьшего значения. Самая правая точка - точка пика популяции жертв. Между этими точками количество хищников сначала убывает до нижней точки фазовой кривой, $x_1 = 75$, где достигает наименьшего значения, а затем растет до верхней точки фазовой кривой. Фазовая кривая охватывает точку, с координатами $x_1 = 75$, $x_2 = 15$, которая называется стационарной.

На языке дифференциальных уравнений это означает, что система имеет стационарное состояние $\frac{dx_1}{dt} = 0$, $\frac{dx_2}{dt} = 0$, которое достигается в точке $x_1 = 75$, $x_2 = 15$. Если в начальный момент система находилась в стационарной точке, то решения $x_1(t), x_2(t)$ не будут изменяться во времени и останутся постоянными. Всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности популяций (решений). Неэллиптичность формы траектории, охватывающей центр, отражает негармонический характер колебаний.

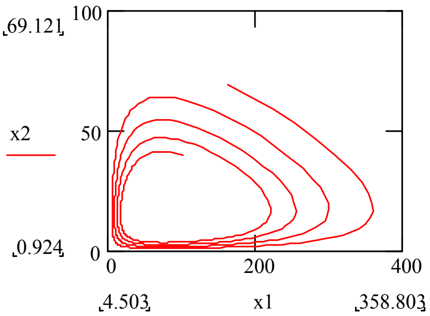
Модель "Хищник-жертва" с логистической поправкой

Рассмотрим модель конкурирующих видов с "логистической поправкой" $(\gamma \cdot x_i^2)$:

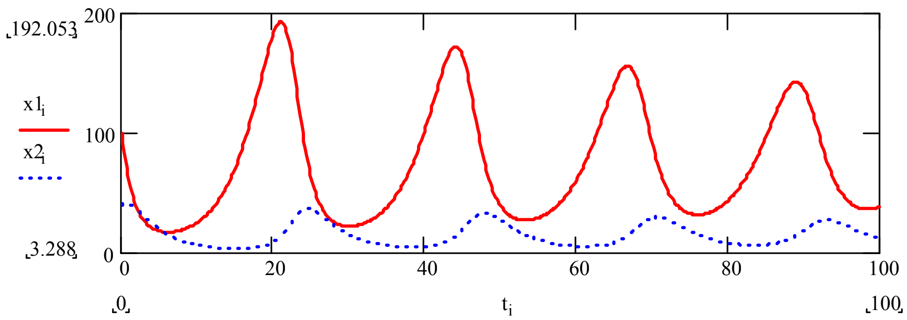
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1(t) = g \cdot x_1(t) - a \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) + \gamma \cdot x_1(t)^2 \\ \frac{d}{dt}x_2(t) = -s \cdot x_2(t) + b \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) + \gamma \cdot x_2(t)^2 \end{cases}, \qquad (3.5)$$

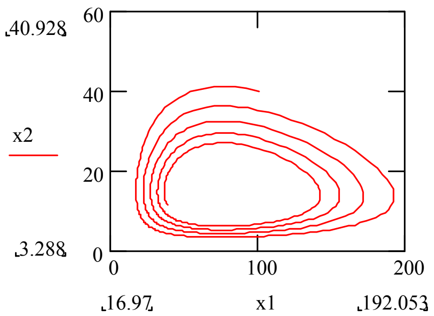


с помощью, которой можно моделировать ситуации положительного (+γ) или отрицательного (-γ) внешнего влияния на экосистему. В этом случае поведение решений в окрестности стационарной точки меняется в зависимости от величины и знака параметра γ.



В случае положительного влияния, например, в результате дополнительного пополнения экосистемы биологическими объектами, стационарная точка является неустойчивым фокусом и амплитуда колебаний численности видов растет. Как бы близко ни было начальное состояние к стационарному, с течением времени состояние системы будет сильно отличаться от стационарного.





В случае отрицательного влияния, например, внутривидовой конкуренции за пищу при ограниченных ресурсах или в результате изымания биологических объектов из экосистемы, стационарная точка превращается в устойчивый фокус, а решения – в затухающие колебания. При любом начальном состоянии экосистемы через некоторое время ее состояние становится близким к стационарному и стремится к нему при $t \to \infty$.

Модель Холлинга – Тэннера «Конкурирующие виды»

На примере простой модели Вольтерра — Лотка и с логистической поправкой было продемонстрировано одно из важнейших свойств модельных экосистем, находящихся в равновесии — они могут легко разрушаться даже при наличии незначительных возмущающих факторов.

Конечно, большинство моделей является идеализацией действительности: в них внимание сосредоточено на некоторых основных переменных и соотношениях между ними. Поэтому устойчивость моделей относительно малых возмущений чрезвычайно важна при их практическом использовании. Модели, не чувствительные к малым возмущениям, получили название грубые.

Модель Вольтерра — Лотка неустойчива относительно возмущений, поскольку ее стационарное состояние — центр. Существует другой вид моделей, в которых возникают незатухающие колебания, – это модели, имеющие на фазовых портретах предельные циклы. Такая модель существует для системы конкурирующих видов — это модель Холлинга — Тэннера.

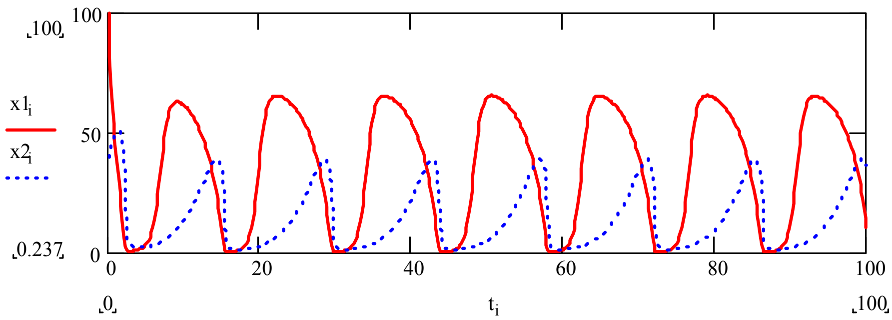
Скорость роста популяции жертв $\frac{dx_1}{dt}$ в этой модели равна сумме трех величин:

1. скорости размножения особей в отсутствие хищников: $r \cdot x_1$;
2. влияния внутривидовой конкуренции за пищу при ограниченных ресурсах $-r \cdot x_1 \frac{x_1}{K}$;
3. влияния хищников $-w \cdot x_2 \frac{x_1}{D + x_1}$ в предположении, что хищник перестает убивать, когда насыщается.

Скорость роста популяции хищников $\frac{dx_2}{dt}$ строится так же, как в модели Вольтерра – Лотка, в предположении, что жертвы встречаются редко. Если для поддержания жизни одного хищника нужно J жертв, то популяция из x_1 жертв сможет обеспечить пищей $\frac{x_1}{J}$ хищников. Модель роста популяции хищников, в которой их число не может превысить эту критическую величину, имеет вид $\frac{dx_2}{dt} = x_2 \cdot \left(c - \frac{c \cdot J}{x_1} \cdot x_2 \right)$. Таким образом, модель Холдинга — Тэннера имеет вид:

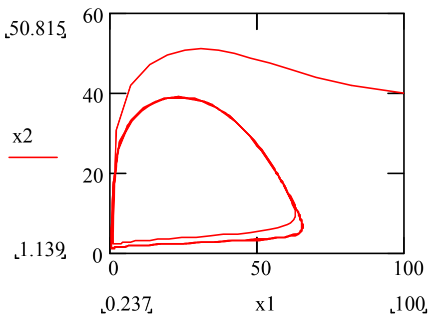
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_1 = r \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) \cdot x_1 - w \cdot x_2 \cdot \frac{x_1}{D + x_1} \\ \frac{d}{dt} x_2 = c \cdot \left(1 - \frac{J}{x_1} \cdot x_2\right) \cdot x_2 \end{cases}, \qquad (3.6)$$

где r, c, K, D, $J > 0$. При этом из (3.6) следует, что если:



$$c < \frac{r}{K} \cdot \frac{K - D - 2}{1 + D}$$

на фазовом портрете системы будет устойчивый предельный цикл, т.е. все траектории, начинающиеся в окрестности замкнутой кривой спиралевидно будут приближаться к ней при $t \to \pm\infty$.



На рисунке примера видно, что фазовая кривая системы с начальным состоянием вне области, ограниченной предельным циклом, "наматываются" извне на одну и ту же замкнутую кривую.

Простейшая модель эпидемии

За многие годы существования человечества огромное число людей погибло от различных эпидемий. Для того чтобы иметь возможность бороться с эпидемиями, т.е. своевременно применять те или иные медицинские мероприятия, необходимо уметь сравнивать эффективность этих мероприятий. Сравнить же их можно только в том случае, если есть возможность предсказать, как при том или ином мероприятии будет меняться ход эпидемии, т.е. как будет меняться число заболевших.

В общем случае модель эпидемии должна затронуть области, изучаемые по меньшей мере тремя науками:

1) микробиологией, 2) медициной и 3) социальной психологией,

т.е. учитывать законы, управляющие

- деятельностью бактерий,
- степень восприимчивости к инфекции отдельных людей,
- (когда заболевший становится источником инфекции) вероятность встречи носителей инфекции с еще здоровыми людьми.

Для простоты будем рассматривать последствия самого простого мероприятия – ничегонеделания, т.е. будем прогнозировать естественный ход эпидемии.

Итак, пусть имеется N здоровых людей, и в момент времени $t = 0$ в эту группу попадает один заболевший человек (источник инфекции). Будем предполагать, что никакого удаление заболевших из группы не происходит (нет ни выздоровления, ни гибели, ни изоляции). Считаем, что человек становится источником инфекции сразу же после того, как он сам заразится.

Обозначим число заболевших (источников инфекции) в момент времени t через $x(t)$, а число потенциально могущих заболеть – через $y(t)$. Очевидно, что в любой момент времени:

$$x(t) + y(t) = N + 1,$$

при $t = 0$ выполняется условие $x(0)=1$.

Рассмотрим интервал времени $[t,\ t + \Delta t]$, где Δt – малая промежуток времени. Сколько больных Δx появится за этот промежуток времени? В первом приближении можно предположить, что их численность будет пропорциональна величине Δt, а также числу встреч здоровых и заболевших людей, которое учитывается произведением величин:

$$\Delta x \approx \alpha \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot \Delta t,$$

где α – фактор (вероятность) встречи носителей инфекции с еще здоровыми людьми.

Последнее соотношение можно переписать так:

$$\Delta x \approx \alpha \cdot x(t) \cdot \left[N + 1 - x(t)\right] \cdot \Delta t$$

Устремляя *Δt* к нулю, получим в пределе:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x \cdot \left[N + 1 - x\right]$$

Полученное дифференциальное уравнение вместе с условием *x(0)=1* определяет функцию *x(t)*, т.е. численность заболевших в момент времени *t*.

Решим это уравнение. Введем новую неизвестную функцию u(t), связанную с функцией x(t), соотношением

$$u(t) = \frac{1}{x(t)}$$

Уравнение для новой функции окажется проще для нахождения *x(t)*.

Дифференцируя полученное тождество, получим:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Используя последние соотношения, можно преобразовать дифференциальное уравнение к виду:

$$\frac{du}{dt} = \alpha - \alpha \cdot u \cdot \left[N + 1\right]$$

Как известно, общее решение этого уравнения может быть представлено в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного, т.е.

$$u = C \cdot e^{-\alpha \cdot (N+1) \cdot t} + \frac{1}{1 + N},$$

где С – произвольная постоянная

Отсюда:

$$x = \frac{1 + N}{1 + C \cdot (1 + N) \cdot e^{-\alpha \cdot (1+N) \cdot t}}$$

Так как при $t = 0$ значение $x(0) = 1$, то для определения величины С имеем уравнение

$$1 = \frac{1 + N}{1 + C \cdot (1 + N)}$$

откуда

$$C = \frac{N}{1+N}$$

Окончательно

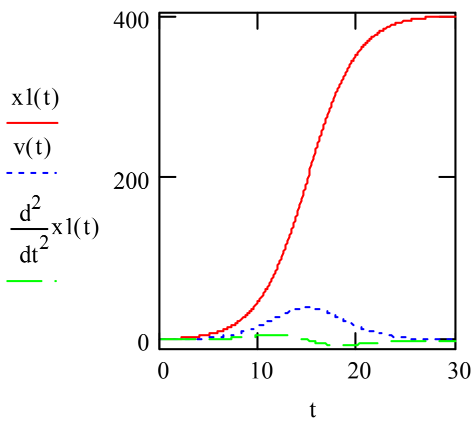
$$x = \frac{1+N}{1+N\cdot e^{-\alpha\cdot(1+N)\cdot t}}$$

Итак, мы знаем число заболевших людей как функцию времени. Проанализируем полученное уравнение. Полагая $t = 0$, как и следовало ожидать, получаем $x(0) = 1$:

$$x = \frac{1+N}{1+N\cdot e^{0}} = 1$$

При возрастании t знаменатель дроби убывает, т.е. $x(t)$ увеличивается:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1+N)^2\cdot\alpha\cdot N\cdot e^{-\alpha\cdot(1+N)\cdot t}}{\left(1+N\cdot e^{-\alpha\cdot(1+N)\cdot t}\right)^2}$$



Это соответствует нашим представлениям, так как число заболевших людей может только увеличиваться. Максимальное их количество будет тогда, когда числитель этой дроби обратится в ноль:

$$\frac{1}{e^{\alpha\cdot(1+N)\cdot t}} = 0 \text{ , т.е. при } t\to\infty$$

Интересно выяснить, как меняется скорость увеличения числа больных. Для решения этого вопроса нужно изучить величину $\frac{d^2x}{dt^2}$:

Дифференцируя, получаем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{(N+1)^3\alpha^2 N\left(N\cdot\exp(-2\alpha(N+1)t) - \exp(-\alpha(N+1)t)\right)}{\left(N\cdot\exp(-\alpha(N+1)t)+1\right)^3}$$

Числитель дроби превращается в нуль при $t = \frac{\ln(N)}{\alpha\cdot(N+1)}$ Таким образом, когда $t\in\left[\frac{\ln(N)}{\alpha\cdot(N+1)};\infty\right]$, величина $\frac{d^2x}{dt^2} > 0$, а когда $t\in\left[0;\frac{\ln(N)}{\alpha\cdot(N+1)}\right]$, величина $\frac{d^2x}{dt^2} < 0$. Следовательно, функция $\frac{dx}{dt}$ – скорость возрастания числа заболевших – растет вплоть до момента $t = \frac{\ln(N)}{\alpha \cdot (N+1)}$, а затем убывает.

Так как нашей целью являлось создание лишь иллюстративной модели, то здесь мы абстрагировались от многих факторов. Тем не менее, даже в такой грубой модели удается воспроизвести обычно наблюдаемое в эпидемиях явление – в начале эпидемии число заболевших резко возрастает, а в последствии скорость распространения инфекции резко снижается.