

Динамическая модель загрязнения воздушного бассейна

Исследование проблем атмосферной диффузии имеет длительную историю, однако, его результаты применяются к вопросам загрязнения атмосферы сравнительно недавно.

В 20–30-х годах XX столетия выработалось представление о том, что во многих случаях перенос тепла и влаги в приземном слое атмосферы можно приближенно рассматривать как распространение пассивной примеси и исследовать эти процессы на основе одних и тех же дифференциальных уравнений.

Важное значение имело установление вида уравнений, описывающих атмосферную диффузию. Для описания атмосферной диффузии использовались уравнения параболического вида, являющиеся обобщением известного уравнения Фикка.

Уже в первых работах, посвященных проблемам атмосферной диффузии, наметились два подхода к моделированию распространения примеси в приземном слое атмосферы.

1. Первый основан (опирался на работу А.Роберса) на решении *уравнения турбулентной диффузии с постоянными коэффициентами*.
2. Другой подход был развит О.Сеттенем и заключался в использовании формул для определения концентрации примесей от источника, *полученных статистическим путем*. Т. е. здесь для определения профиля распределения концентраций примеси используются полуэмпирические формулы (полученные опытным путём).

В отечественных работах, как правило, рассматриваются уравнения турбулентной диффузии с *переменными коэффициентами*. Такой путь является универсальным, так как позволяет решать задачи с различными источниками, характеристиками среды, граничными условиями.

Рассмотрим первый подход, основанный на уравнениях переноса и турбулентной диффузии.

Уравнение переноса и диффузии примеси в атмосфере

Для изучения основных закономерностей распределения примеси в атмосферном воздухе относительно источника выброса удобным является метод описания, который был предложен Лагранжем. Он заключается в том, что поток воздуха в момент времени t разбивается на бесконечно малые объемы, траекторию движения которых рассматривают. Если элементы объема воздуха различаются по своему химическому составу, т.е. в них присутствуют посторонние вещества, отличные от воздуха, то их рассматривают, как некоторые примеси, которые имеются в потоке. В результате конвективных и диффузионных процессов примесь распространяется на весь объем воздуха.

Принимая ряд следующих допущений, построим необходимые для изучения одномерные модели распределения примеси в пространстве.

Пусть $q(t, x, y, z)$ – концентрация примеси, мигрирующей вместе с потоком воздуха в атмосфере. Как правило, примесь входит в поток в виде газообразной добавки или большого числа мелких твердых частиц веществ.

Вначале рассмотрим перенос примеси при отсутствии диффузии. В этом случае ее концентрация в элементе объема воздуха остается постоянной, и ее перенос осуществляется только вдоль траектории x , y и z движения этих объемов воздуха:

$$\frac{dq}{d(t, x, y, z)} = 0 \quad (\text{полный дифференциал})$$

или в развернутом виде:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v_x \frac{\partial q}{\partial x} + v_y \frac{\partial q}{\partial y} + v_z \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \quad , \quad (1)$$

где: оси x , y – расположены в горизонтальной плоскости, ось z – по вертикали;

$v_{x,y,z}$ – составляющие средней скорости перемещения примесей в потоке воздуха конвективными потоками (ветром) соответственно по направлению осей x , y , z ;

$\frac{\partial q}{\partial t}$ – характеризует изменение концентрации примеси потока во времени t .

Конвекция (от лат. *convectio* – *доставка, принесение*) – перенос теплоты в жидкостях, газах или сыпучих средах потоками вещества. *Естественная (свободная)* конвекция возникает в поле силы тяжести при неравномерном нагреве (нагреве сни-

зу) газообразных, текучих или сыпучих веществ. Нагретое вещество под действием архимедовой силы (закон Архимеда):

$$F_A = \Delta \rho \cdot g \cdot V \quad ,$$

(где: $\Delta \rho$ - разность плотностей нагретого вещества и окружающей среды; V – объём) перемещается относительно менее нагретого вещества в направлении, противоположном направлению силы тяжести. Таким образом конвекция приводит к выравниванию температуры вещества.

Интенсивность конвекции зависит от – разности температур (слоёв, объёмов), теплопроводности среды и её вязкости.

Многочисленными исследованиями установлено, что для нижнего слоя атмосферы (50-100 м) с хорошей точностью выполняется закон сохранения массы, выраженный уравнением неразрывности (уравнение Эйлера в гидродинамике, сплошности потока). Оно выражает закон сохранения массы для любого объёма движущегося газа (жидкости):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{v}) \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_x \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_y \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_z \cdot v_z)}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Если жидкость несжимаема ($\rho = \text{Const}$), тогда:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad , \quad \text{где } v = (v_x, v_y, v_z) \quad (2.1)$$

Учитывая равенство (2) и (2.1), имеем:

$$\operatorname{div}(\vec{v} \cdot \vec{q}) = \vec{v} \cdot \operatorname{div}(\vec{q}) + \vec{q} \cdot \operatorname{div}(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \operatorname{div}(\vec{q}) = v_x \frac{\partial q}{\partial x} + v_y \frac{\partial q}{\partial y} + v_z \frac{\partial q}{\partial z}$$

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{v} \cdot \vec{q}) \quad (3)$$

В данном случае концентрация примеси изменяется только за счет силы конвективных потоков:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -v_x \frac{\partial q}{\partial x} - v_y \frac{\partial q}{\partial y} - v_z \frac{\partial q}{\partial z} = -\vec{v} \cdot \operatorname{div}(\vec{q}) \quad ,$$

если конвективные потоки отсутствуют $v_{xyz} = 0$, тогда концентрация примеси будет постоянна:

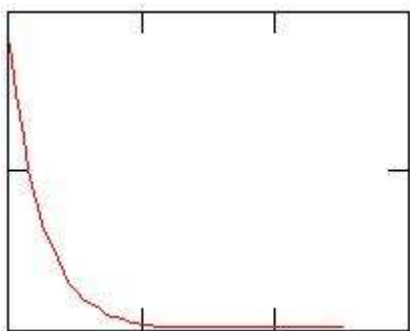
$$\frac{\partial q}{\partial t} = 0$$

В процессе переноса примеси часть ее оседает или перестает существовать (входит в реакцию с внешней средой, или распадается). Из теории химической кинетики известно, что скорость химического взаимодействия веществ, в частном, простом случае может быть представлена пропорционально текущей концентрации загрязняющего вещества (т. е. уравнением 1-го порядка¹):

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\sigma \cdot q \quad (4)$$

где: $\sigma \geq 1$ – коэффициент (константа) скорости взаимодействия примеси с внешней средой, с^{-1} . Смысл этой величины становится понятным после решения уравнения (4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{q} &= -\sigma \cdot \partial t \\ \ln\left(\frac{q}{q_0}\right) &= -\sigma \cdot t \\ q &= q_0 \cdot \exp(-\sigma \cdot t) \end{aligned} \quad (5)$$



Из рисунка видно, что σ есть величина обратная интервалу времени, за который интенсивность примеси по сравнению с начальной интенсивностью q_0 уменьшится в e ($\approx 2,718282$) раз.

С учетом этого процесса уравнение (3) принимает вид:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\text{div}(v \cdot q) - \sigma \cdot q \quad (6)$$

Полученная в таком виде модель распространения примеси достаточно хорошо отражает сущность процесса, хотя несколько идеализирует реальную физическую картину, которая гораздо сложнее. Известно, что примесь вследствие теплового движения частиц вещества расплывается в воздухе, образуя сложное распределение концентраций на достаточно большом расстоянии от источника. Это объясняется тем, что атмосфера является турбулентной средой, в которой стихийно образуются диффузионные вихри (мелкомасштабные флуктуации).

¹ В общем случае может быть реакцией и нулевого или более высокого порядка

Диффузия (от лат. “распространение”, “растекание”) - это процесс взаимного проникновения соприкасающихся веществ друг в друга вследствие теплового движения частиц вещества. Диффузия происходит в направлении уменьшения концентрации вещества и ведёт к его равномерному распределению по занимаемому объёму, т. е. выравниванию химического потенциала.

В газах для молекул или ионизированных частиц происходит самодиффузия. Крупные частицы, взвешенные в газе (например, частицы дыма, в виде пыли или аэрозоли) диффундируют благодаря броуновскому движению.

Диффузия характеризуется коэффициентом диффузии k , который можно определить из соотношения Эйнштейна:

$$k = \frac{1}{3} \cdot \bar{l} \cdot \bar{c} \quad ,$$

где: \bar{l}, \bar{c} - средняя длина и средняя скорость свободного пробега молекул.

Диффузия в значительной степени зависит от давления газа (P) и температуры:

$$k = f(P^{-1}, \sqrt{T}) \quad \text{поскольку} \quad \bar{l} = P^{-1}, \bar{c} = \sqrt{T}$$

Второй закон Фика (уравнение диффузии, 1855 г.) дает математическое описание диффузионных процессов:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \nabla(\vec{k} \cdot \vec{q}) = k_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + q_x \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + q_y \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} + q_z \frac{\partial^2 k}{\partial z^2}$$

в основном $K = k_x = k_y = k_z = \text{Const}$, поэтому часто используют сокращённый вид:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = K \cdot \nabla(\vec{q})$$

С учетом явления диффузии полное уравнение распространения примеси (6) дополняется слагаемыми уравнения Фика :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\text{div}(v \cdot q) - \sigma \cdot q + \nabla(\vec{k} \cdot \vec{q})$$

где: $k_{x, y, z}$ - горизонтальные и вертикальная составляющие коэффициента диффузии;

∇ - оператор Лапласа.

Вид уравнения (по нарастанию сложности явления)	Процесс (явление) с нарастанием сложности
$\frac{\partial q}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{v} \cdot \vec{q})$	Концентрация примеси (q) в рассматриваемом объеме воздуха меняется только под действием <i>конвективного потока</i> (ветра) воздуха, скорость и направление которого v_{xyz} .
$\frac{\partial q}{\partial t} = 0$ Для $v_{xyz}=0$: $q=q_0$	Характеризует частный случай, когда <i>отсутствует конвекция</i> $v_{xyz}=0$ и концентрация примеси в объеме постоянна.
$\frac{\partial q}{\partial t} = -\operatorname{div}(v \cdot q) - \sigma \cdot q$ Для $v_{xyz}=0$: $\frac{\partial q}{\partial t} = -\sigma \cdot q$, тогда: $q = q_0 \cdot \exp(-\sigma \cdot t)$	В процессе переноса примеси ветровым потоком (v_{xyz}) часть ее <i>оседает или перестает существовать</i> (входит в реакцию с внешней средой) пропорционально скорости σ
$\frac{\partial q}{\partial t} = -\operatorname{div}(v \cdot q) - \sigma \cdot q + \nabla(\vec{k} \cdot \vec{q})$	Влияние <i>турбулентности атмосферы</i> , когда примесь расплывается под действием процесса диффузии

Ожидаемые закономерности распространения примеси в атмосфере под влиянием основных параметров источника выброса и окружающей среды рассмотрим на следующих простых примерах одномерных моделей.

Простейшие одномерные диффузионные уравнения

Рассмотрим распространение примеси в бесконечной среде (атмосфере) x на простейшем примере ее диффузии для установившегося (стационарного) процесса

$\frac{\partial q}{\partial t} = 0$, в котором скорость движения потока воздуха (конвекция, ветер) отсутствует

и $v=0$ (безветренная погода):

$$\sigma \cdot q = k_x \cdot \frac{d^2 q}{dx^2} , \quad (7)$$

Принимаем, что источник выбросом загрязняющего вещества находится в точке

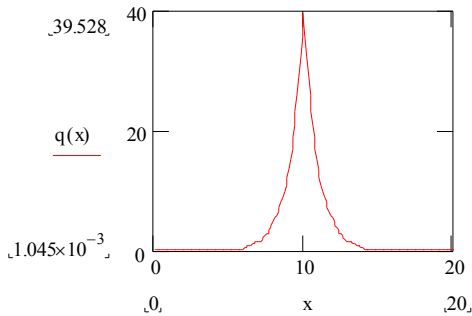
x_0 , с мощностью Q . С учетом начальных условий ($x = x_0$: $q = q_0 = \frac{Q}{2 \cdot \sqrt{\sigma \cdot k_x}}$), окончательным аналитическим решением для модели (7) будет уравнение:

$$q = \frac{Q}{2 \cdot \sqrt{\sigma \cdot k_x}} \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\sigma}{k_x}} \cdot |x - x_0|\right), \quad \left[\frac{мг}{м}\right] \quad (6.7)$$

где Q – количество выбрасываемой в пространство примеси в единицу времени (мг/с) из источника, расположенного в точке x_0 , $Q = \text{Const}$;

k_x – горизонтальная составляющая коэффициента диффузии, м²/с;

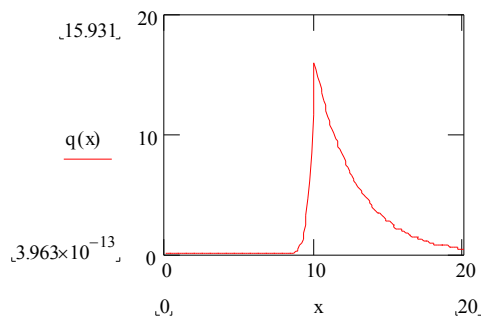
$\sigma \geq 1$ – коэффициент скорости взаимодействия примеси с внешней средой, с⁻¹.



Таким образом, в результате диффузии получается решение (6.7), экспоненциально и симметрично убывающее в оба направления от точки расположения источника примеси x_0 . Легко проверить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} q \cdot dx = \frac{Q}{\sigma},$$

т.е. общее количество примеси в пространстве равно мощности источника ее выброса уменьшенное на величину поглощения подстилающей поверхности.



Рассмотрим другой более интересный случай, когда скорость потока воздуха (ветра) v отлична от нуля. Предположим, что она постоянна и положительна. Тогда распространение примеси описывается уравнением:

описывается уравнением:

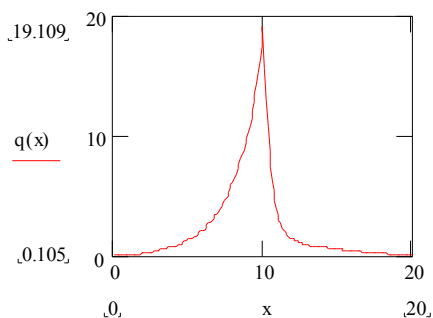
$$v_x \cdot \frac{dq}{dx} + \sigma \cdot q = k_x \cdot \frac{d^2q}{dx^2} \quad (6.8)$$

Окончательное решение этой задачи будет иметь вид:

$$q = \frac{Q}{A} \cdot \exp\left[-\left(A - \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \cdot v\right) \cdot \frac{|x - x_0|}{2 \cdot k_x}\right], \quad (6.9)$$

где: $A = \sqrt{4 \cdot \sigma \cdot k_x + v^2}$

При положительных v , левая (по отношению к x_0) часть экспоненты прижимается к x_0 , а правая, – наоборот расплывается, что как раз и характеризует снос примеси ветром с одновременной диффузией.



Для ситуации, когда некоторое время (Δt_1) ветер дул в сторону положительных значений x ($v > 0$), а затем переменялся и стал дуть в течение (Δt_2) в противоположном, отрицательном направлении ($v < 0$) получают два решения q_1 и q_2 и среднее значение примеси q находят по формуле средней взвешенной:

$$q(x)_\Sigma = \frac{\sum_{i=1}^n q_i \cdot \Delta t_i}{\sum_{i=1}^n \Delta t_i} \quad (6.10)$$

для каждого расстояния x .

Статистические и эмпирические методики расчета рассеяния загрязняющих веществ в приземном атмосферном воздухе

В настоящее время известно большое число подходов, посвященных определению концентрации рассеиваемых примесей в атмосферном воздухе в непосредственной близости от земной поверхности.

Предлагаемые методики для расчета концентраций, полученные при решении полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии или из рассмотрения гауссовой модели рассеяния, позволяют определить поле концентраций примеси, которое формируется в условиях той или иной термодинамической стратификации атмосферы. При этом для высокого источника распределение приземных концентраций в направлении проекции осевой линии струи на поверхность земли характеризуется максимумом концентрации на некотором расстоянии от источника. Для одного и того же источника максимальная концентрация примеси у поверхности земли и расстояние от источника, где она наблюдается, определяются типом устойчивости атмосферы в слое перемешивания и скоростью ветра.

Параметры и критерии, определяющие концентрацию примеси в приземном слое атмосферы

Поступающая в атмосферу от источника примесь рассеивается и переносится в воздухе постоянно существующими в атмосфере турбулентными вихрями разных

масштабов. Интенсивность атмосферной турбулентной диффузии примеси для разных погодных условий различна и определяются главным образом двумя факторами:

1. вектором скорости ветра (направлением и величиной);
2. вертикальным температурным градиентом (перепадом температур по высоте).

Указанные факторы в свою очередь зависят от:

1. свойств подстилающей поверхности;
2. теплового баланса на подстилающей поверхности;
3. динамических и температурных характеристик воздушной массы, участвующей в рассеянии.

Вертикальный температурный градиент определяется температурой поверхности земли и прилегающего к ней слоя воздуха. Чем сильнее нагрета подстилающая поверхность, тем интенсивнее вертикальное перемешивание воздуха. Нагревающиеся у поверхности земли массы воздуха вследствие уменьшения их плотности поднимаются вверх, а более холодные и плотные массы воздуха опускаются к поверхности земли.

По величине вертикального температурного градиента Пасквиллом и Тернером предложена качественная классификация состояние атмосферы по следующим трем градациям устойчивости:

1. безразличное (нейтральное);
2. неустойчивое (конвективное);
3. устойчивое (инверсионное).

Если, поднимаясь, нагретый воздух расширяется адиабатически, без обмена теплом с окружающими массами воздуха, то его температура понижается примерно 1°C на каждые 100 м высоты. Это значение принимается за адиабатический градиент температуры.

1. При вертикальном градиенте температуры, равном адиабатическому (или ниже), поднимающийся объем воздуха на каждом уровне будет обладать практически такими же свойствами, что и окружающие массы воздуха и, следовательно, его движение будет равномерным и не будет иметь дополнительного ускорения. Такое состояние атмосферы называется безразличным (нейтральным).

2. Если температура окружающего воздуха понижается с высотой больше адиабатического градиента, (это бывает при сильно нагретой солнцем подстилающей поверхности земли) то движущийся снизу объем воздуха получает ускорение и образующиеся таким образом нагретые конвективные потоки поднимаются на большую высоту, а взамен опускаются холодные массы воздуха. Такие условия называются неустойчивыми (конвективными). Они характеризуются интенсивным вертикальным перемешиванием воздуха.

3. Если вертикальный градиент температуры с высотой приближается к нулю или становится отрицательным (температура с высотой возрастает, т.е. возникает инверсия температуры), то вертикально поднимающиеся объемы воздуха оказываются холоднее окружающих масс и их движение затухает. Такие условия называются устойчивыми (инверсионными). Они характеризуются очень слабым турбулентным обменом.

Для количественного выражения состояния устойчивости атмосферы в различных методиках обычно используют безразмерный критерий устойчивости – коэффициент стратификации, в виде соотношения вертикального градиента температуры и соответствующего перепада скоростей ветра:

$$\varepsilon = f \left(\frac{\Delta T^m}{\Delta u^n} \right) ,$$

где: $\Delta T, \Delta u$ – разность температур на высотах z_1 и z_2 к разности скоростей ветра на этих высотах; m и n – некоторые постоянные.

или

$$\left(\frac{z_2}{z_1} \right)^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} = \frac{u_2}{u_1} , \quad \varepsilon = \frac{2}{1 + \frac{\Delta(\ln z)}{\Delta(\ln u)}} ,$$

или определяют по специальным таблицам² номограммам в зависимости от шероховатости подстилающей поверхности, теплового баланса поверхности земли и скорости ветра.

Интенсивность турбулентного обмена, соответствующая каждому из трех классов устойчивости, характеризуется пространственными составляющими коэффициента турбулентной диффузии (k_x, k_y, k_z) или составляющими дисперсии ($\delta_x, \delta_y, \delta_z$):

² как и в модели ОНД-86, коэффициент температурной стратификации A

$$k = \frac{1}{2} \cdot \frac{d \delta^2}{dt} ,$$

где: $\delta_x(t) = [x(t) - x(0)]^2$ – квадратичная дисперсия координаты x движущейся частицы примеси, определяемая через соответствующую лагранжеву корреляционную функцию скоростей или по наблюдениям за видимыми очертаниями дымовой струи.

Рассеяние примеси в условиях каждого отдельного класса устойчивости атмосферы имеет свои особенности, формирующие характерный вид дымовой струи. По виду реальных дымовых струй можно получить информацию о термодинамическом состоянии нижнего слоя атмосферы.

1 (*нейтральное*). В случае безразличного состояния, наблюдается конусообразная струя. Расстояние до максимума приземной концентрации в этом случае больше, чем при неустойчивых условиях, а максимальная концентрация меньше.

2 (*конвективное*). Теплое время года и ясная погода, как правило, определяет неустойчивую стратификацию, здесь наблюдается волнообразная струя, в виде совокупности клубов дыма, переносимых крупными вертикальными вихрями. Поскольку клубы достигают земли близко от источника, максимальная приземная концентрация при неустойчивых условиях сравнительно велика и быстро снижается с удалением от источника в направлении ветра.

3 (*инверсионное*). В условиях устойчивой стратификации образуется веерообразная струя. Для нее (в силу изменчивости направления ветра) характерна:

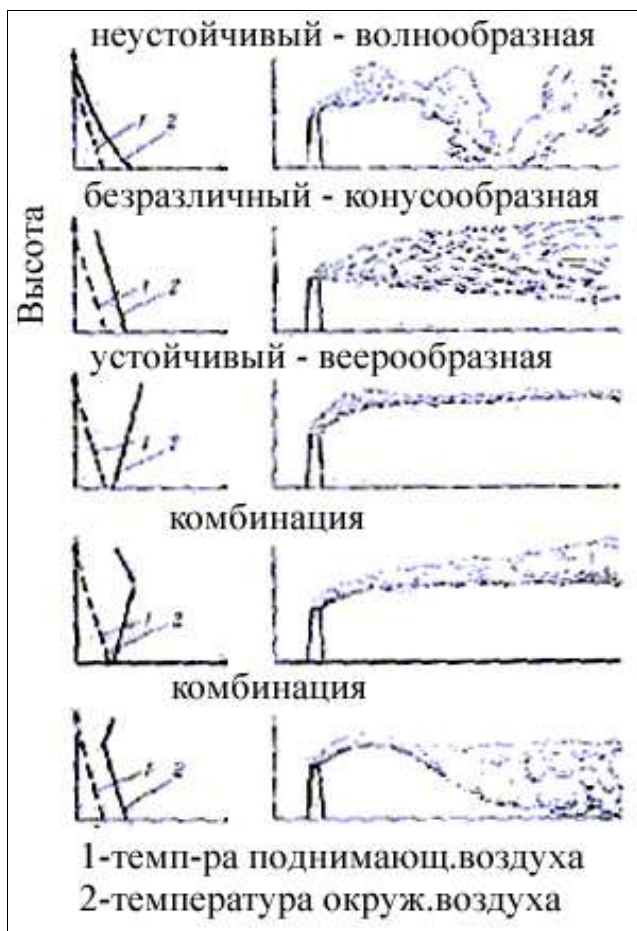
- извилистая траектория движения примеси при слабом вертикальном и поперечном рассеянии самой струи;
- далекая от источника максимальная приземная концентрация, которая однако меньше по величине, чем при неустойчивой и безразличной стратификациях.

В большинстве случаев устойчивая стратификация считается благоприятной для выбросов из высоких труб с точки зрения загрязнения приземного слоя воздуха, так как загрязнение на сравнительно больших расстояниях не переносится к земной поверхности.

Устойчивая стратификация может оказаться неблагоприятной в следующих случаях:

1) выброс происходит из наземного источника, т. е. на уровне земли;

2) высота трубы ниже высоты окружающих ее близко расположенных зданий;



3) поперечное распространение и изменение направления струи ограничены глубокой узкой долиной;

Если верхняя граница приземного устойчивого (инверсионного) слоя оказывается ниже уровня выброса, то создаются наиболее благоприятные условия для рассеяния примеси, выбрасываемой из труб, так как в этом случае образуется приподнятая струя и рассеяние происходит только в слое выше верхней границы инверсии, которая предотвращает перенос примеси к земле. Достаточно продолжительные такие условия наблюдаются зимой. Летом они обычно кратковременны, и могут существовать на протяжении лишь нескольких

часов, главным образом ночью (4 схема на рисунке).

При переходе от ночной инверсии к дневной конвекции в ясное теплое летнее утро приземная инверсия, разрушаясь у поверхности земли, становится приподнятой и может образовать «крышку» над устьем трубы. Она препятствует распространению примеси вверх, в то время как развивающиеся у земли конвективные вихри перемешивают струю только в пределах прилегающего к земле неустойчивого слоя (5 схема на рисунке), что приводит к «задымлению».

В общем случае «задымление» достаточно сильно зависит и от того, какого рода источники рассматриваются. Это необходимо принимать во внимание при решении вопроса об особо опасных метеоусловиях для каждого типа источников и построении отдельных пессимистических прогнозов рассеяния примеси и загрязнения атмосферы.

Считается, что для приподнятого (высокого) источника особо опасно сочетание приподнятой инверсии, начинающейся на высоте выброса, и малой скорости ветра

(штиля) в приземном слое, а для наземного источника — сочетание приземной инверсии и приземного штиля.

В литературе имеются сведения о том, что туман в слое перемешивания существенно ухудшает условия рассеяния примеси. Обнаружено, что в каплях тумана концентрируется не только та примесь, которая находится вблизи подстилающей поверхности, но также часть примеси из лежащих выше более загрязненных слоев. Туман как бы аккумулирует примесь из весьма протяженного по высоте слоя, что существенно увеличивает загрязнение воздуха вблизи подстилающей поверхности.

На распространение примеси, выбрасываемой в атмосферу, оказывает влияние и особенности рельефа местности. Под влиянием неровностей рельефа изменяется турбулентный режим воздушных потоков и, следовательно, характер рассеяния и поле концентраций примеси у земли. Это связано с тем, что:

1. В сложных формах рельефа возникает местная циркуляция воздуха, образуются восходящие и нисходящие потоки, особым образом меняется направление ветра.
2. На наветренных склонах и вершинах возвышенностей увеличение скорости ветра может достигать 10—40%.
3. В плохо продуваемых долинах и пониженных формах рельефа уменьшение скорости составляет 20—50%.
4. Суточные амплитуды температуры в долинах существенно больше, чем на возвышенности; в ночные часы здесь образуются более частые и мощные инверсии, а в дневное время — сверхадиабатические градиенты со значительными перепадами температуры. Однако, с увеличением скорости ветра влияние рельефа ослабляется.

При сопоставлении результатов моделирования и наблюдений влияния рельефа на рассеивание примеси в приземном слое атмосферы установлено, что для не очень больших и пологих возвышенностей — от 50 до 300 м высотой поправка к максимальному значению концентрации примеси у земли может составлять не более 50% (от расчетных величин) для достаточно широкого интервала высот источников.

Наземные источники выбросов вредных веществ составляют наибольшую группу и выбрасывают примеси в непосредственной близости от земной поверхности. По

сравнению с другими источниками загрязнения для них характерна существенная доля оксидов углерода и азота.

К настоящему времени сформировалось несколько подходов к определению концентрации рассеиваемых примесей в атмосферном воздухе в непосредственной близости от земной поверхности. Предлагаемые методики для расчета концентраций, как правило, получены при решении полуэмпирического уравнения диффузии или гауссовой модели рассеяния. Они позволяют определить поле концентраций примеси, формирующееся в условиях той или иной термодинамической стратификации атмосферы. При этом для приподнятого источника распределение приземных концентраций в направлении проекции осевой линии струи на поверхность земли характеризуется максимумом концентрации на некотором расстоянии от источника. Для одного и того же источника максимальная концентрация примеси у поверхности земли и расстояние от источника, где она наблюдается, определяются типом устойчивости атмосферы (стратификацией) в слое перемешивания и скоростью ветра.

Далее рассмотрим наиболее известные модели прогноза рассеяния примесей загрязняющих веществ, используемые в различных расчетных методиках. Использование для расчетов приземной концентрации примеси той или иной методики приводит к сходным результатам, если обеспечена корректность определения параметров дисперсии, класса устойчивости атмосферы и периода осреднения применяемого комплекса метеорологических параметров. Наилучшая сходимость с экспериментальными данными получаются при расчете рассеяния примеси для тех категорий погоды, которые характеризуются устойчивой и безразличной стратификацией атмосферы.

Модели ИЭМ

В основу методики, разработанной Институтом экспериментальной метеорологии (ИЭМ) положены две модели:

- модель с линейно растущей вертикальной диффузией K_z , используемая для наземных (низких) не приподнятых источников ($K_z = S \cdot u \cdot z$);
- степенная модель, в которой предполагается следующая зависимость вертикальных изменений скорости ветра (U_z) и диффузии (K_z), используемая для высоких источников высотой более 50 м:

$$K_z = k_1 \cdot \left(\frac{z}{z_1}\right)^p, \quad U_z = u_1 \cdot \left(\frac{z}{z_1}\right)^\sigma,$$

где: u_1 – скорость ветра на высоте z_1 , м/с;

k_1 – коэффициент диффузии на высоте z_1 , м²/с;

U_z – вертикальное изменение скорости ветра, м/с;

K_z – коэффициент вертикальной диффузии, м²/с;

p, σ – безразмерные коэффициенты стратификации атмосферы.

Степенная модель позволяет, варьируя показатели p и σ , выяснить общую зависимость результата от характера вертикальных изменений скорости ветра (U_z) и диффузии (K_z). Для этой модели, например, с помощью МНК по результатам наблюдений величин $K_z - k_1$ и $U_z - u_1$ рассчитывают коэффициенты стратификации атмосферы p, σ :

$$\frac{K_z}{k_1} = \left(\frac{z}{z_1}\right)^p \rightarrow \ln \frac{K_z}{k_1} = p \cdot \ln \left(\frac{z}{z_1}\right) \rightarrow p = \frac{\Delta \ln K}{\Delta \ln z}$$

$$\frac{U_z}{u_1} = \left(\frac{z}{z_1}\right)^\sigma \rightarrow \ln \frac{U_z}{u_1} = \sigma \cdot \ln \left(\frac{z}{z_1}\right) \rightarrow \sigma = \frac{\Delta \ln U}{\Delta \ln z}$$

Выражение для распределения концентрации в этом случае имеет вид:

$$C(x) = \frac{M \cdot \exp\left(-\frac{R}{x}\right)}{\Gamma(1+\varphi) \cdot U_h \cdot H} \cdot \left(\frac{R}{x}\right)^\varphi, \quad (7.1)$$

где: $\varphi = \frac{1+p}{2+p-\sigma}$

$$R = \frac{H^2 \cdot U_1 \cdot \left(\frac{H}{z_1}\right)^{\sigma-\varphi}}{k_1 \cdot (2+p-\sigma)^2}$$

$U_h = \frac{U_1}{1+p} \cdot \left(\frac{H}{z_1}\right)^\sigma$ – скорость ветра, усредненная в слое от подстилающей поверхности до высоты H ;

$\Gamma(1+\varphi)$ – гамма функция Эйлера: $\Gamma(1+\varphi) = \int_0^\infty \alpha^\varphi \cdot \exp(-\alpha) \cdot d\alpha$;

M – мощность источника выброса, г/с.

Для модели с линейно растущим коэффициентом диффузии $K_z = S \cdot u \cdot z$ и скорости оседания примеси $w_g > I$:

$$C(x) = \frac{M \cdot \exp\left(-\frac{H}{B \cdot x}\right)}{\Gamma(1+\nu) \cdot U_h \cdot H} \cdot \left(\frac{H}{B \cdot x}\right)^\nu, \quad (7.2)$$

где $B = S u / U_h$ – корреляционная функция;

$v = w_g / (S \cdot u_1)$;

$S = 0,4$ – постоянная Кармана.

Методика ИЭМ предназначена для расчета рассеяния примеси от точечного или линейного источника на основе формул (7.1) и (7.2) при широком диапазоне метеорологических условий. Эта методика приспособлена главным образом для определения осадка выпадающей примеси.

К недостатку этой методики следует отнести отсутствие учета верхней границы пограничного слоя.

Модель Холланда

Для случая волнообразной струи (неустойчивого конвективного состояния атмосферы) часто используется модель Холланда. Волнообразная струя загрязняющего вещества вызывает кратковременное увеличение приземной концентрации, т.к. конвективные потоки воздуха тут же изгибают ее вверх. В этом случае источник считается наземным, а расстояние до него равным:

$$x^* = \sqrt{x^2 + H^2} ,$$

где: x – расстояние вдоль направления ветра.

Расчетная модель имеет вид:

$$C(x) = \frac{M}{\pi \cdot U \cdot (x^*)^2}$$

Расчеты по модели Холланда показывают, что вначале происходит интенсивное рассеивание примеси (что свойственно для газов), а затем следует снижение концентрации. Такое явление наблюдается на автомагистрали, где максимальная концентрация достигается на дороге, а затем по мере удаления от нее снижается, приближаясь к фоновому значению. Таким образом, модель Холланда наилучшим образом описывает рассеяние примеси от линейного наземного источника, например, распространения выхлопных газов от автотранспортного потока.

В настоящее время в мировой практике наибольшее применение нашли две методики, которые рекомендованные для расчета промышленного загрязнения атмосферы:

1. Методика расчета рассеивания выбросов атомных реакторов, разработанная Паскуиллом и развитая Гиффордом, которая рекомендована МАГАТЭ для оценки загрязнения атмосферы от предприятий атомной промышленности и энергетики.

2. Методика, разработанная под руководством М.Е.Берлянда в Главной геофизической обсерватории (ГГО) СССР, проверенная на большом экспериментальном материале и положенная в основу утвержденного Госстроем СССР «Указания по расчету рассеивания в атмосфере вредных веществ, содержащихся в выбросах предприятий ОНД-86».

Методика МАГАТЭ

Модели, лежащие в основе методик МАГАТЭ, основаны на гауссовой модели рассеяния примеси. Эти методики, разработанные по результатам экспериментальных исследований Паскуиллом и Гиффордом, широко применяются для различных расчетов в зарубежных исследованиях.

Гауссова модель факела от точечного источника выброса, расположенного в точке с координатами (0, 0, H), имеет вид:

$$C(x) = \frac{M \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \delta_x^2}\right) \cdot \left[\exp\left(-\frac{(z-H)^2}{2 \cdot \delta_z^2}\right) + \exp\left(-\frac{(z+H)^2}{2 \cdot \delta_z^2}\right) \right]}{2 \cdot \pi \cdot \delta_x \cdot \delta_z \cdot U} \quad (7.3)$$

На уровне земли ($z \approx 0$):

$$C(x) = \frac{M \cdot \exp\left(-\left[\frac{x^2}{2 \cdot \delta_x^2} + \frac{H^2}{2 \cdot \delta_z^2}\right]\right)}{\pi \cdot \delta_x \cdot \delta_z \cdot U}, \quad (7.4)$$

где: M — мощность источника; U — средняя скорость ветра; δ_x и δ_z — дисперсии распределения концентрации примеси в направлении осей x и z (в горизонтальной и вертикальной плоскости). Дисперсии δ_x и δ_z являются возрастающими функциями времени, зависящими от стратификации атмосферы, и определяются на основании экспериментальных данных. Дисперсия может быть определена, как:

$$\delta_x^2 = \sum (C_x - \bar{C})^2$$

Для практических расчетов, в методике предлагается оценивать дисперсии (δ_x и δ_z) по горизонтальному и вертикальному углу расширению дымовой струи, с последующим сравнением результатов наблюдения с таблицами и графиками. При этом

предполагается, что рассеяние струи в горизонтальной и вертикальной плоскости описывается гауссовым распределением со стандартными отклонениями распределений концентраций δ_x и δ_z по оси x и z соответственно. Основные положения этой модели:

- турбулентность всюду одинакова;
- скорость ветра постоянна во всем слое распространения струи и направление ветра не меняется при движении потока;
- модели (7.3) и (7.4) имеют прямолинейную траекторию движения облака и предназначены для выполнения экспресс оценок аварий на относительно небольших расстояниях.

Во всех методиках расчета рассеяния, основанных на гауссовой модели, оценка среднегодовой концентрации ведется с учетом среднегодовой повторяемости различных классов устойчивости атмосферы. Определение этой повторяемости как статистически достоверной среднегодовой величины требует обработки большого количества данных наблюдений. В соответствии с рекомендациями МАГАТЭ сбор метеорологических данных в точке выброса при определении среднегодовой повторяемости характеристик ветра и турбулентности атмосферы следует проводить по крайней мере 1 раз в час, при средней длительности записи около 10 мин. Затем должен быть проведен подробный статистический анализ полученных данных. При этом следует обеспечить такую надежность систем сбора и обработки данных, при которой ежегодно имелось бы не менее 90% совместных данных по различным переменным, отобранным для ввода в модель.

Гауссова модель сравнительно проста, наглядна и удобна, однако определение концентрации по этой методике в крайних классах устойчивости (при сильной неустойчивости, умеренной и сильной устойчивости), на дальних расстояниях и для разных географических районов может давать большую погрешность.

Эмпирическая гауссова модель не допускает обобщения на более широкий класс условий, в частности, неприменима для сложного рельефа местности, не учитывает зависимости дисперсии от высоты выброса и т.д.

Методика ОНД-86 (модель ГГО)

Как показали многочисленные проверки, модель ГГО наилучшим образом соответствует задачам контроля загрязнения атмосферы и борьбы с загрязнением. Она с самого начала была нацелена на построение достаточно обоснованной практической схемы расчета максимальной разовой концентрации в условиях развитого турбулентного обмена и опасной скорости ветра (наиболее неблагоприятных для высоко-го источника).

В настоящее время методика ГГО обязательно используется при проектировании и эксплуатации всех предприятий, выбрасывающих вредные вещества в атмосферу. Эта методика основана на результатах больших теоретических исследований и подтверждена на опытном материале более 20 крупных экспедиций.

Результаты расчета по этой методике проверялись также по данным зарубежных экспериментов. Так, в США в районе тепловых электростанций Кейстоун и Хаммер Сити сравнение расчетных и опытных данных по всем характеристикам дало удовлетворительные результаты.

В соответствии с методикой ГГО степень загрязнения приземного слоя атмосферного воздуха выбросами вредных веществ из приподнятых непрерывно действующих точечных и линейных источников определяется по наибольшему рассчитанному значению разовой приземной концентрации вредных веществ C_m , которая устанавливается на некотором расстоянии от места выброса x_m при наиболее неблагоприятных метеорологических условиях, когда скорость ветра достигает опасного значения U_m и имеет место интенсивный турбулентный обмен.

Методика ГГО позволяет рассчитать поле разовых концентраций примеси у земли при выбросе из одиночного источника и группы источников, при нагретых и холодных выбросах, при выбросе из аэрационных фонарей, а также дает возможность одновременно учесть действие разнородных источников и рассчитать суммарное загрязнение атмосферы от промышленных комплексов (с учетом суммарного вредного действия ингредиентов), что является чрезвычайно важным для современного производства.

На основании этой методики можно определить:

1. минимальную высоту трубы предприятия, через которую производится выброс в атмосферу вредных веществ;
2. предельно допустимую мощность выброса, которая обеспечивает не превышение санитарных норм содержания вредных веществ в приземном слое воздуха;
3. границы санитарно-защитной зоны (СЗЗ) предприятий.

Методика ГГО позволяет сделать расчет только разовых концентраций (осредненных за 20—30 мин).

В основе расчета лежит формула:

$$C_m = \frac{A \cdot M \cdot F \cdot \eta \cdot m \cdot n}{H^x \cdot V^y \cdot \Delta T^z},$$

где: A – коэффициент (табличная величина) зависящий от температурной стратификации атмосферы³ и определяющий условия вертикального и горизонтального рассеяния вредных веществ в атмосферном воздухе, $c^{2/3} \text{ мг град}^{1/3}/\text{Г}$;

M – количество вредного вещества, выбрасываемого в атмосферу, г/с;

F – безразмерный коэффициент, учитывающий скорость взаимодействия и оседания вредных веществ атмосферном воздухе;

$\eta > 0$ – коэффициент рельефа местности.

m, n – безразмерные коэффициенты, учитывающие условия выхода газовой смеси из устья источника выброса и определяющие значения степеней:

$$x = \{4/3; 2; 7/3\}, y = \{1; 1/3; 0\} \text{ и } z = \{0; 1/3; 0\};$$

$H > 0$ – высота источника над уровнем земли, м;

$\Delta T > 0$ – разность между температурой выбрасываемой газовой смеси и температурой окружающего атмосферного воздуха, град;

V – объемный расход газовой смеси, $\text{м}^3/\text{с}$.

Расстояние X_M от источника выбросов, на котором приземная концентрация при неблагоприятных метеорологических условиях достигает максимального значения C_M , определяется по формуле:

$$X_M = \frac{5-F}{4} \cdot (6..25) \cdot H \cdot \frac{1.1}{\sqrt{\eta+0.2}}, \text{ м}$$

3 Температурная стратификация (слоистость) атмосферы – это характер (особенность) распределения температуры воздуха по высоте на данной территории

Приземная концентрация вредных веществ C_x в атмосфере по оси факела выброса на различных расстояниях x от источника выброса для опасной скорости ветра U_M определяется по формуле:

$$C_x = S_1 \cdot C_m, \text{ мг/м}^3$$

где: S_1 - безразмерный коэффициент, который в зависимости от соотношения , опре

$X^* = \frac{x}{X_m}$ делается по формулам:

для $X^* \leq 1$ и $2 \leq H < 10$ (низкие и наземные источники):

$$S_N = [3 \cdot (X^*)^2 - 8 \cdot X^* + 6] \cdot (X^*)^2 \quad S_1 = 0.125 \cdot [(10 - H) + S_N \cdot (H - 2)] ;$$

для $1 < X^* \leq 8$:

$$S_1 = \frac{1.13}{0.13 \cdot (X^*)^2 + 1} ;$$

для $X^* > 8$ и $F \leq 1.5$:

$$S_1 = \frac{X^*}{3.58 \cdot (X^*)^2 - 35.2 \cdot X^* + 120} .$$

Основные принципы расчетных формул модели ГГО

Выбросы, поступающие из дымовых и вентиляционных труб и отверстий, всегда обладают начальной скоростью и часто перегреты относительно окружающего воздуха. Поскольку на уровень приземных концентраций значительное влияние оказывает высота источника выбросов (а точнее высота, на которой происходит интенсивное перемешивание с окружающим атмосферным воздухом), предпринималось много попыток схематизации наблюдаемого процесса. В основном она была связана с тем, что часто наблюдается заметный подъем дымового факела над источником выброса (трубой). При слабом ветре отчетливо видно, что дым сначала распространяется практически вертикально вверх и только на некотором уровне, где усиливается ветер, начинает преобладать горизонтальный перенос. Создается впечатление, что источник примеси как будто приподнят над трубой. Поэтому предполагалось учитывать начальный подъем примеси ΔH и рассматривать вместо реального источника на высоте H некоторый условный источник, расположенный на более высоком уровне ($H_e = H + \Delta H$), обычно называемом *эффективной* высотой.

Простейшие оценки ΔH основаны на использовании некоторых результатов теории распространения струи в неподвижной среде и нахождении эмпирических связей ΔH с указанными факторами. Полагается, что начальный участок факела над

трубой можно рассматривать как распространяющуюся вверх струю, в которой постепенно с высотой за счет расширения струи затухает скорость ее движения ω . Величина ΔH находится как уровень z (отсчитанный от источника вверх), на котором значение вертикальной скорости ω мало по сравнению со скоростью ветра u и перенос примеси примерно горизонтальный.

При проектировании промышленных предприятий важно определить наибольшую возможную величину концентрации примеси C_m , ибо в целях удовлетворения гигиенических требований она не должна превышать предельно допустимого значения. Особое значение имеет зависимость C_m от скорости ветра u . С одной стороны, при фиксированной высоте источника C_m возрастает с уменьшением u ; с другой стороны, с уменьшением u возрастает ΔH . Поэтому существует некоторая «опасная» скорость ветра u_m , при которой достигается наибольшее значение приземной концентрации вредного вещества. На основании длительных наблюдений значение опасной скорости ветра при неблагоприятных условиях стратификации u_m и соответствующую ей величину наибольшей концентрации определяют через параметры:

$$v_m = 0.65 \cdot \sqrt[3]{\frac{V \cdot \Delta T}{H}}, \quad f = 1000 \cdot \frac{w_0^2 \cdot D}{H^2 \cdot \Delta T},$$

где: $V = \pi \cdot R_0^2 \cdot w_0$ – объемный расход газовойдушной смеси, м³/с;

w_0 – средняя скорость газовойдушной струи, м/с.

Рассчитываемое значение C_m относится к расстоянию:

$$X_m = d \cdot H$$

Коэффициент d зависит от параметров v_m и f и определяют с помощью интерполяционных формул. При достаточно больших v_m величина d изменяется от 15 до 25, т.е. в среднем выполняется соотношение:

$$X_m \approx 20 \cdot H$$

Охарактеризуем возможный диапазон изменения рассмотренных параметров для реально встречающихся источников.

1. Для достаточно **мощных источников нагретых выбросов** (ТЭС, ТЭЦ, агломерационные фабрики, цементные заводы):

$$H=50\dots250 \text{ м}, \Delta T=50\dots200 \text{ С}, V=50\dots1200 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Учитывая взаимозависимость этих параметров, значения v_m относительно велики и изменяются в пределах 2–7 м/с. Величина f , как правило, составляет: 0,5...2 м/(с²·С), а иногда достигает 5...6 м/(с²·С).

2. Для слабо нагретых выбросов, а также в случае малой мощности источников, например для большинства вентиляционных выбросов высота, перегретость и объем выбросов соответственно равны:

$$H=20...50\text{м}, \Delta T=5...10 \text{ С}, V=1...10 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Значения v_m обычно изменяются в пределах 0,5...1 м/с, а f превышает 10 и 100 м/(с²·С) – для холодных выбросов.

Между величинами v_m и f существует определенная корреляция. Большим f , как правило, соответствуют малые v_m , а малым f – большие v_m , т. е.:

$$v_m \sim \frac{1}{f}$$

Интервал осреднения концентрации здесь принят равным 20 минутам. Это связано с одной стороны, с тем, что разовые ПДК относятся примерно к 20-минутному интервалу времени. С другой стороны, при экспериментальных работах по определению концентраций такой период отбора проб близок к оптимальному. При взятии проб за более короткий промежуток времени сильно сказываются флуктуации воздушного потока, а при длительном отборе увеличивается вероятность значительного отклонения оси факела, которое вызывает резкое снижение концентрации.

Коэффициент F в основном зависит от скорости осаждения примеси. Для легких примесей $F=1$, а чем примесь тяжелее, тем выше F .

МОДЕЛИ КАЧЕСТВА ВОДЫ ВОДНЫХ ОБЪЕКТОВ

О механизме процесса формирования качества воды

Как было отмечено ранее, одной из наиболее важных характеристик, определяющих качество природных вод является ассимилирующая способность водного объекта, т. е. способность природных вод к разложению большого числа компонентов, содержащихся в сбрасываемых твердых и жидких отходах. В настоящем разделе рассмотрим модели, которые более или менее точно объясняют это явление. С этой целью выделим те физические величины, на которые можно было бы опираться при определении качества, например, речной воды. Следует отметить, что в этом случае приходится сталкиваться с большими трудностями.

Во-первых – из-за разнообразия форм загрязнения:

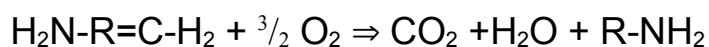
- сбросы органического происхождения;
- загрязнение химическими веществами;
- радиоактивность;
- тепловое загрязнение;
- патогенные бактерии и др.

Во-вторых – из-за различных последствий, связанных с загрязнением:

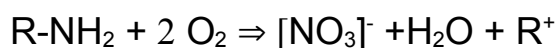
- гибель флоры и фауны;
- влияние на земледелие;
- запахи и др.

Наиболее значительными в количественном отношении и по своему влиянию на окружающую среду являются отходы органического происхождения (вещества, подверженные биохимическому окислению, т. е. *неконсервативные* вещества).

Биохимическое окисление органических веществ под воздействием бактерий можно разделить на две ступени. На *первой ступени* осуществляется окисление углерода органического вещества до CO_2 , а водорода до H_2O :



На другой ступени протекает в основном окисление азотных (аммонийных, амино-) соединений до нитратов:

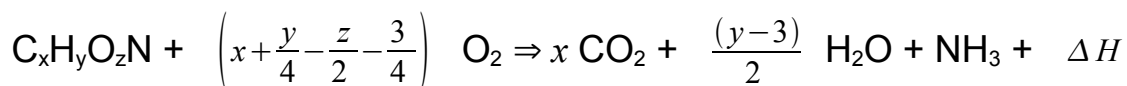


где: $\text{H}_2\text{N-R=C-H}_2$ – некоторое *органическое вещество*;

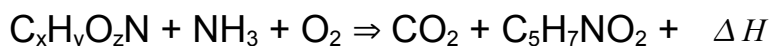
R - *остаток* органического вещества, содержащий, например, фосфор, азот и другие элементы.

Суммарные реакции биохимического окисления (аэробные условия) можно представить следующими уравнениями.

- Катаболические:



- Анаболические:



где: $\text{C}_5\text{H}_7\text{NO}_2$ – среднее соотношение основных элементов в клеточном веществе. Катаболические и анаболические превращения происходят внутри клетки микроорганизмов.

Таким образом, результат влияния любого типа органического загрязнения можно рассматривать как поглощение растворенного кислорода. Это уравнение, являясь справедливым для аэробной среды, т.е. там, где присутствует растворенный кислород, показывает, что разложение органического вещества можно считать эквивалентным реакции окисления, которая приводит к понижению концентрации растворенного кислорода, подвергая опасности экологическое равновесие в реке.

Из вышеизложенного очевидно, что величина *растворенного кислорода* (РК) является интегральным показателем жизнедеятельности водной среды, в связи с чем при определении качества, например, речной воды эту переменную относят к числу наиболее важных.

Концентрацию загрязняющего вещества органического происхождения обычно определяют количеством кислорода, которое необходимо для полного его окисления, т.е. выражают с помощью особого показателя – *биохимической потребности в кислороде* (БПК).

Классическими результатами в области математического моделирования кислородного режима и динамики изменения органического вещества являются исследования Стритера и Фелпса [12], которые для описания динамики БПК и РК предложили следующую систему уравнений:

$$\frac{dC_{БПК}}{dt} = -k_1 \cdot C_{БПК}$$

$$\frac{dC_{РК}}{dt} = k_2 \cdot (C_{н-РК} - C_{РК}) - k_1 \cdot C_{БПК}$$

где: $C_{БПК}$ - концентрация органического вещества, которая измеряется в единицах кислорода;

$C_{РК}$ - концентрация растворенного в воде кислорода;

$C_{н-РК}$ - концентрация насыщенного в воде кислорода;

k_1 – константа скорости биохимического окисления (оксидации) органического вещества, которая зависит от $C_{РК}$ и температуры;

k_2 – коэффициент аэрации, который зависит от температуры.

В силу важности взаимодействия между РК и БПК стало обычным говорить о *моделях* или *системе РК-БПК*. Однако, было бы неверным утверждать, что эти величины сами по себе достаточны для полной характеристики качества воды. Они лишь представляют собой один из многих аспектов сложного гидрологического, термохимического, биофизического и биохимического процесса, который протекает в водном объекте.

Упомянутое выше уравнение является одним из звеньев замкнутой феноменологической цепи, отображающей явления, происходящие в экосистеме. Отправным моментом в описании этой цепи может стать биохимическое окисление органических веществ под действием бактерий.

Образующийся в процессе разложения CO_2 поглощается фитопланктоном в процессе фотосинтеза, и, таким образом, превращается в биомассу. Та же участь постигает многие другие вещества, в молекулу которых входит фосфор и азот, являющиеся побочными продуктами реакции разложения, описанной вышеприведенным уравнением (по этой причине такие вещества часто называют питательными веществами).

Продукты биологического разложения превращаются в растительную биомассу. Такая биомасса составляет питательную среду для организмов зоопланктона, поедаемых в свою очередь планктоноядными рыбами, которые сами являются пищей для плотоядных рыб. Все элементы этой трофической цепи (от фитопланктона до плотоядных рыб) в силу процесса отмирания поставляют органические вещества, которые,

присоединяясь к поступившим из внешней среды органическим веществам, составляют питательную среду для популяций бактерий. Приведенное описание цикла питания представляется крайне прямолинейным, и упрощенным, потому что не учитывает большого числа явлений, которые, хотя и могут быть опущены, но при определенных условиях оказываются достаточно значительное влияние.

Следует обратить внимание, что биохимическая потребность в кислороде (БПК) является только одним из многих важных показателей загрязнения воды органическими веществами, поскольку БПК не эквивалентно общей концентрации органических веществ в воде. Такой концентрации эквивалентна химическая потребность в кислороде (ХПК) только в том случае, когда это органическое вещество окисляется бихроматом калия. Поэтому БПК составляет лишь долю ХПК. Для одних органических веществ эта доля может быть большей, для других – меньшей. Если для бытовых сточных вод эта доля практически не изменяется (или изменяется в небольшом интервале), то для промышленных сточных вод она может изменяться в пределах от нескольких процентов до величин близких к 100%.

Для некоторых веществ, которые не подвержены биохимическому окислению (*биохимически жестких*), БПК может быть равно нулю при довольно высоких ХПК, например, при БПК=0 для пикриновой кислоты – ХПК=1283 мг/л. Из этого следует, что БПК не всегда может рассматриваться как полный эквивалент концентрации загрязняющих веществ в водах.

Поэтому, как правило, с помощью БПК характеризуют первую ступень биохимического окисления, т.е. долю концентрации органического вещества, которая используется бактериопланктоном для удовлетворения своих энергетических потребностей (дыхание). Охарактеризовать процесс появления новых клеток можно с помощью разницы ХПК-БПК.

В начале рассмотрим модели, целиком абстрагированные от динамики различных компонентов экосистемы растительного и животного происхождения (биота), т.е. когда такие компоненты стационарны во времени.

Обобщенная модель формирования качества воды РК-БПК

Рассмотрим модель, которая будет состоять из четырех балансовых уравнений сохранения:

- массы (объема) водного потока;
- энергии водного потока;
- растворенного в воде неконсервативного вещества;
- растворенного в воде кислорода.

Рассмотрим бесконечно малый участок реки dx , который отделяет данное поперечное сечение водотока ($x+dx$) от исходного сечения (x). Баланс массы потока осуществляется на участке реки между сечениями x и $x+dx$. Площадь поверхности поперечного сечения реки; являющаяся обычно функцией времени (значительно изменяется по сезонам года) и пространства (значительно изменяется по длине реки), обозначим через $S(x, t)$, а объемный расход потока через сечение x в момент t

обозначим через $Q(x, t)$, $\left[\frac{м^3}{с} \right]$.

Обозначим, приходящиеся на единицу длины $\left[\frac{м^3}{с \cdot м} \right]$:

- Приход:

$Q_{инф}(x, t)$ – притоки за счет инфильтрации подземных вод;

$Q_{бок}(x, t)$ – боковые притоки;

- Расход:

$Q_{исп}(x, t)$ – расход на испарение,

В итоге, принцип сохранения массы воды на элементарном участке можно проиллюстрировать схемой на рис.4.1.

Поскольку объемный расход выходящего потока равен:

$$Q(x+dx, t) = Q(x, t) + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx$$

и при условии, что изменение объема воды за время dt есть $\frac{\partial S}{\partial t} \cdot dx \cdot dt$, получим:

$$\frac{\partial S}{\partial t} \cdot dx \cdot dt = Q(x, t) \cdot dt - Q(x+dx, t) \cdot dt + (Q_{инф} + Q_{бок} - Q_{исп}) \cdot dx \cdot dt$$

упрощая

$$\frac{\partial S}{\partial t} \cdot dx = Q - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \right) + (Q_{\text{инф}} + Q_{\text{бок}} - Q_{\text{исп}}) \cdot dx$$

упрощая далее:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = Q_{\text{инф}} + Q_{\text{бок}} - Q_{\text{исп}} \quad (1)$$

Рассмотрим вывод *уравнения сохранения энергии* для элементарного участка реки (рис.2). Обозначим тепловые мощности, которые связаны с транспортом вещества через:

$W_{\text{вх}} = \rho \cdot C_p \cdot T(x, t) \cdot Q(x, t)$ – тепловая мощность поступающего потока воды с температурой T ;

$T(x, t)$ – абсолютную температуру воды в сечении x в момент времени t ;

$W_{\text{инф}} = \rho \cdot C_p \cdot T_{\text{инф}}(x, t) \cdot Q_{\text{инф}}(x, t) \cdot dx$ – тепловая мощность инфильтрующихся (подземных, родниковых) вод с температурой $T_{\text{инф}}$;

$W_{\text{бок}} = \rho \cdot C_p \cdot T_{\text{бок}}(x, t) \cdot Q_{\text{бок}}(x, t) \cdot dx$ – тепловая мощность бокового притока с температурой $T_{\text{бок}}$;

$W_{\text{вых}} = \rho \cdot C_p \cdot T(x + dx, t) \cdot Q(x + dx, t)$ – тепловая мощность выходящего потока воды с температурой $T(x + dx, t)$;

$W_{\text{исп}} = \rho \cdot H_{\text{исп}} \cdot Q_{\text{исп}} \cdot dx$ – тепловая мощность испаряющейся воды;

$H_{\text{исп}}$ – скрытая теплота парообразования;

Расход испаряющейся воды $Q_{\text{исп}}$ зависит от её температуры и метеорологического состояния окружающего воздуха. Для его определения можно воспользоваться следующей классической формулой:

$$Q_{\text{исп}} = K_{\text{исп}} \cdot v \cdot [E_1 - E_2]$$

$K_{\text{исп}}$ – константа пропорциональности;

E_1 – интенсивность испарения воды;

E_2 – давление водяных паров в атмосфере при $T_{\text{атм}}$;

v – скорость ветрового потока;

ρ – плотность воды;

C_p – удельная теплоемкость воды;

$T(x, t)$, $T_{\text{инф}}(x, t)$ – абсолютные температуры входящего потока, инфильтрующихся вод в сечении x в момент времени t ;

Следующий тепловой поток W_{noz} не связан с транспортом вещества, а обусловлен поглощением энергии солнечной радиации, которая передается воде излучением и конвективным теплообменом с воздушными массами атмосферы. Для его определения можно воспользоваться следующим уравнением:

$$W_{noz} = l \cdot X_{рад} \cdot dx = [l \cdot \sigma \cdot (\beta \cdot T_{атм}^4 - T^4) + K_{\alpha} \cdot v \cdot (T_{атм} - T)] \cdot dx$$

где:

σ – постоянная Стефана-Больцмана;

β – коэффициент облачности;

$T_{атм}$ – абсолютная температура атмосферного воздуха у водной поверхности;

K_{α} – коэффициент теплоотдачи (конвективного теплообмена);

На рис.2 отображены не все возможные энергетические потоки, например, не учтен возможный теплообмен водной среды с руслом реки и теплообразование в результате трения при перемещении водных масс. Для выполнения более детальных прогнозных оценок необходим учет и этих потоков.

Поскольку изменение энергии на элементарном участке за время dt выражается

как $H_{\Sigma} = \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial(S \cdot T)}{\partial t} \cdot dx \cdot dt$, принцип сохранения энергии можно представить в следующем виде:

$$H_{\Sigma} = [W_{ex} - W_{вых} + W_{инф} + W_{бок} - W_{исп} + W_{noz}] \cdot dt$$

или в развернутом виде:

$$\rho C_p \frac{\partial(S \cdot T)}{\partial t} \cdot dx = \rho \cdot C_p \left[Q \cdot T - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dx \right) + Q_{инф} \cdot T_{инф} \cdot dx \right] + \dots$$

$$\dots + \rho \cdot C_p \cdot Q_{бок} \cdot T_{бок} \cdot dx + l \cdot X_{рад} \cdot dx - \rho \cdot H_{исп} \cdot Q_{исп} \cdot dx$$

учитывая, что:

$$\frac{\partial(S \cdot T)}{\partial t} = S \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + T \cdot \frac{\partial S}{\partial t}$$

и определяя скорость водного потока, как:

$$\omega(x, t) = \frac{Q(x, t)}{S(x, t)},$$

а также принимая во внимание, произведение изменений на порядок ниже, чем остальные изменения, а потому равные нулю:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial T}{\partial x} dx \approx 0$$

находим:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \omega \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{S} \cdot \left[- \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \cdot T + Q_{инф} \cdot T_{инф} + Q_{бок} \cdot T_{бок} + \frac{l \cdot X_{рад}}{\rho \cdot C_p} - \frac{H_{исп} \cdot Q_{исп}}{C_p} \right] \quad (2)$$

Далее рассмотрим вывод уравнения *сохранения массы неконсервативного вещества (БПК)*. С целью более простого описания физико-химических и биохимических процессов примем ряд упрощающих допущений:

- в реке постоянно и на всей её протяженности существуют аэробные условия;
- в реке отсутствуют ингибиторы роста популяций бактерий;
- неконсервативное вещество равномерно распределено в каждом поперечном сечении реки, т.е. модель сводится к одномерной;
- можно пренебречь влиянием дисперсии и диффузии в продольном направлении, т.е. вещество разлагаемое под действием бактерий, распространяется в реке только благодаря переносу течением реки.

С учетом этого построим дифференциальное уравнение в частных производных для БПК. Количество неконсервативного вещества, поступающего в выбранный участок (рис.3) через сечение x в единицу времени, составляет $Q(x, t) \cdot C_{БПК}(x, t)$, а количество вещества выходящего через сечение $(x+dx)$ $Q(x+dx, t) \cdot C_{БПК}(x+dx, t)$.

Поскольку потоки инфильтрационных подземных вод и испарения практически не имеют БПК, они не входят в баланс. Значение БПК будут представлены только следующими слагаемыми:

- $Q_{бок} \cdot C_{БПК \cdot бок} \cdot dx$ - учитывает поступление от притоков;
- $M(x, t) \cdot dx$ - учитывает другие случаи поступления (образования) БПК, в основном за счет отмирания биомассы представителей гидрофлоры и фауны;
- $K_{сед} \cdot C_{БПК} \cdot dx$ - учитывает явление седиментации (осаждения) веществ, которые подвержены биохимическому окислению в русло реки;
- $B(C_{БПК}, C_{O_2}, T) \cdot dx$ - количество окисленного неконсервативного вещества, которое зависит от состава и концентрации самого вещества, разлагаемого бактериями, концентрации кислорода $C_{O_2}(x, t)$, растворенного в воде и ее температуры T .

Таким образом, изменение БПК на элементарном участке dx (см.рис.3) в интервале времени dt можно представить следующим уравнением:

$$\frac{\partial(S \cdot C_{\text{БПК}})}{\partial t} dx = Q C_{\text{БПК}} - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) \left(C_{\text{БПК}} + \frac{\partial C_{\text{БПК}}}{\partial x} dx \right) + (M + Q_{\text{бок}} C_{\text{БПК-бок}} - K_{\text{сед}} C_{\text{БПК}} - B) dx$$

учитывая, что:

$$\frac{\partial(S \cdot C_{\text{БПК}})}{\partial t} = S \cdot \frac{\partial C_{\text{БПК}}}{\partial t} + C_{\text{БПК}} \cdot \frac{\partial S}{\partial t}$$

и принимая во внимание, изменения на порядок ниже, чем остальные, а потому равные нулю:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial C_{\text{БПК}}}{\partial x} dx \approx 0$$

находим:

$$\frac{\partial C_{\text{БПК}}}{\partial t} + \omega \frac{\partial C_{\text{БПК}}}{\partial x} = \frac{1}{S} \cdot \left[- \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \cdot C_{\text{БПК}} + M + Q_{\text{бок}} \cdot C_{\text{БПК-бок}} - K_{\text{сед}} \cdot C_{\text{БПК}} - B \right] \quad (3)$$

Баланс растворенного в воде кислорода.

Поступая аналогично тому, как это было сделано для БПК, можно составить уравнение в частных производных, которое характеризует изменение во времени и пространстве концентрации растворенного в воде кислорода $C_{O_2}(x, t)$.

Согласно рис.4 предполагаются следующие слагаемые уравнения баланса по растворенному кислороду:

- $Q_{\text{бок}} \cdot C_{O_2-\text{бок}} \cdot dx$ - поступление кислорода с боковыми притоками;
- $N(x, t) \cdot dx$ - образование кислорода на рассматриваемом участке реки за счет протекания фотосинтеза, дыхания, растительных и животных видов, бактерий, а также искусственной аэрации;
- $B \cdot dx$ - количество кислорода затрачиваемое для окисления неконсервативных веществ;
- $A(x, t, T) \cdot l \cdot dx$ - поступление кислорода в результате естественной реаэрации. Величина $A(x, t, T)$ обычно принимается пропорциональной дефициту кислорода:

$$A = K_n(T) \cdot [C_{n-O_2}(T) - C_{O_2}(x, t)] ,$$

где:

$C_{n-O_2}(T)$ - концентрация насыщения кислородом при температуре T ;

$K_n(T)$ – коэффициент пропорциональности, который зависит от температуры и турбулентности воды и воздуха, как правило имеет вид Аррениусовской зависимости:

$$K_n = K_0 \cdot \exp\left(\frac{-E}{R \cdot T}\right)$$

Для простого случая, предполагается, что процессы испарения и инfiltrации подземных вод не осуществляют кислородного обмена.

Аналогично предыдущим уравнениям, итоговый баланс по растворенному кислороду будет иметь вид:

$$\frac{\partial C_{O_2}}{\partial t} + \omega \frac{\partial C_{O_2}}{\partial x} = \frac{1}{S} \cdot \left[- \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \cdot C_{O_2} + N + Q_{\text{бок}} \cdot C_{O_2-\text{бок}} + A \cdot l - B \right] \quad (4)$$

Для моделирования всего речного водотока, полученную модель используют для описания частных случаев, в которых рассматриваемые участки реки представляет собой “сосредоточенные явления”. Типичным примером является слияние водотоков (рис.5):

$$\begin{aligned} Q_{\Sigma} &= Q_1 + Q_2, & T_{\Sigma} &= \lambda_1 \cdot T_1 + \lambda_2 \cdot T_2, \\ C_{\Sigma-\text{БПК}} &= \lambda_1 \cdot C_{\text{БПК}_1} + \lambda_2 \cdot C_{\text{БПК}_2}, & C_{\Sigma-O_2} &= \lambda_1 \cdot C_{1 O_2} + \lambda_2 \cdot C_{2 O_2} \end{aligned}$$

из принципа аддитивности:

$$\lambda_1 = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2}, \quad \lambda_2 = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2}$$

Еще одним примером является случай, в котором имеется точка раздвоения (рис. 6). Здесь из четырех влияющих параметров: $Q, T, C_{\text{БПК}}, C_{O_2}$ только первый меняется в процессе раздвоения.

Интегрируя (аналитическим или численным методом) дифференциальные уравнения модели (1)-(4), можно найти БПК и РК в любой момент и в любой точке водной сети по длине различных входящих в систему участков и в порядке, в котором они следуют друг за другом от выбранной выше по течению начальной точки до определенной точки в нижнем течении.

Например, для схемы рис. 7 интегрируется система дифференциальных уравнений на участках 1 и 2, чтобы затем найти в точке слияния “а” баланс массы и энергии, что определит краевые условия, которые необходимы для выполнения интегрирования на участке 3. Проведя интегрирование на участке 4, переходят к новому со-

средоточенному балансу в точке слияния “б”, что позволит интегрированием участка 5 завершить вычисления по всей водной сети.

Имитационная модель озерной экосистемы

Озера - обширные хранилища пресной воды – привлекают большое внимание в связи с усилением антропогенного воздействия на пресные водоемы, а также возрастающей нехваткой пресной воды для удовлетворения промышленных, сельскохозяйственных и бытовых нужд.

Особый интерес вызывает явление эвтрофикации озер – увеличение в них органической биомассы вследствие поступления биогенных веществ извне (с территории водосбора). По этому признаку выделяют:

1. олиготрофные (с низким запасом органики);
2. мезотрофные (с средним запасом органики);
3. эвтрофные озера (с высоким запасом органики).

Спектр разработанных математических моделей озерных экосистем очень широк: от простейших двумерных, дающих возможность аналитического изучения основных путей развития экосистем, до сложнейших многомерных систем дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих динамику пространственного распределения основных компонент озерных экосистем.

Рассмотрим простейшую имитационную модель экосистемы олиготрофного озера, которая включает агрегированные переменные. Модель построена в предположении, что основные процессы, происходящие в озере, достаточно хорошо описываются, если известна динамика следующих элементов экосистемы:

1. x_1 - фитопланктона (биомасса продуцентов) – водоросли и их жизнедеятельность (цветение, отмирание, фотосинтез органических веществ);
2. x_2 - зоопланктона (биомасса консументов) – простейшие микроорганизмы (инфузории), которые питаются водорослями;
3. x_3 – бентоса – рачки, моллюски (хищные и растительноядные);
4. x_4 – рыб, питающихся зоопланктоном, бентосом и бактериопланктоном;
5. x_5 – бактериопланктона – бактерии, которые служат пищей для зоопланктона, бентоса и рыб;

6. x_6 – детрита (мертвой органики, в виде растительных и животных остатков);
7. x_7 – биогенных ингредиентов среды (биогены) – питательные вещества, в виде растворимых и полурасстворимых веществ, для фитопланктона и бактериопланктона.

Внешними воздействиями на озерную экосистему являются температура, объем и качество воды, втекающей и вытекающей из озера.

Предполагается, что каждый из элементов характеризуется своей концентрацией. Под концентрацией биологических параметров (зоопланктон, бентос, рыбы и т.д.) понимается отношение сырого веса объектов к тому объему воды, в котором они были обнаружены.

Изобразим граф взаимосвязей между элементами экосистемы для семикомпонентной системы. Вершинами графа являются элементы системы. Ребра указывают на наличие потока вещества между рассматриваемыми элементами и его направление. Таким образом, стрелка от элемента x_i к элементу x_j означает, что элемент x_j питается элементом x_i . Это взаимодействие описывают трофической функцией вида:

$$q_{ij} = f(x_i, x_j) = \frac{x_j \cdot x_i^N}{A_{ij} + x_i^N}, \quad j=1-5 \text{ и } 7$$

Скорость вымирания рассматриваемой популяции задается через функцию температуры воды T_e :

$$q_{i6} = B_i \cdot \frac{20 + T_e^2}{0,01 + T_e^2}$$

На основании функций трофических связей и построенного графа записывают балансовые дифференциальные уравнения скорости изменения элементов, составляющих модель озера:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \dot{X}_1 = K_1 \cdot (R_1 \cdot q_{71} - H_1 \cdot q_{12}) - q_{16} \\ \dot{X}_2 &= K_2 \cdot (R_2 \cdot (q_{12} + q_{52}) - H_2 \cdot (q_{24} + q_{23})) - q_{26} \\ \dot{X}_3 &= K_3 \cdot (R_3 \cdot (q_{23} + q_{53}) - H_3 \cdot q_{34}) - q_{36} \\ \dot{X}_4 &= K_4 \cdot R_4 \cdot (q_{34} + q_{24} + q_{54}) - q_{46} \\ \dot{X}_5 &= K_5 \cdot (R_5 \cdot (q_{75} + q_{65}) - H_5 \cdot (q_{52} + q_{53} + q_{54} + q_{57})) - q_{56} \\ \dot{X}_6 &= q_{16} + q_{26} + q_{36} + q_{46} + q_{56} - K_6 \cdot H_6 \cdot q_{65} \\ \dot{X}_7 &= K_7 \cdot (R_7 \cdot q_{57} - H_7 \cdot (q_{71} + q_{75})) \end{aligned}$$

где: A_{ij} и B_{ij} – некоторые экспериментально определяемые коэффициенты;

R_i - коэффициент усвоения пищи представителями рассматриваемой популяции;

H_i - коэффициент энергозатрат на обменные процессы;

K_t – постоянная скорости Вант-Гоффа, которая зависит от температуры:

$$K_t = 2^{\frac{T_b}{10}}$$

Поскольку в большинстве реальных водоемов свет не является ограничивающим фактором, не учитывают влияние освещенности на скорости фотосинтеза.

Решением этой системы уравнений являются кривые изменения концентраций биологических параметров во времени:

$$x_i = f(t)$$

Изменяя температуру воды (среды обитания), ее качество, начальные концентрации биологических параметров получают прогнозную информацию о динамике накопления органической биомассы в озере.

Теоретико-игровые модели в задачах охраны окружающей среды

Все рассмотренные до сих пор модели относились к тем ситуациям, когда отсутствовали силы, которые противодействовали лицам принимающим решения (ЛПР). Между тем гораздо более многочисленны так называемые конфликтные ситуации, в которых различные участники имеют не совпадающие между собой интересы. Модели и математический аппарат пригодный для этих исследований получил название «теория игр» и существенно отличается от ранее рассмотренных.

Основные понятия

Раздел математики, посвященный изучению математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликтов, называется «Теорией игр». Для математического описания конфликтной ситуации необходимо рассмотреть все возможные действия участников конфликта (игроков) и результаты их действий.

Под словом «Игра» подразумевают совокупность правил, руководствуясь которыми участники (игроки) принимают решение.

1. Через I обозначим множество всех игроков. Будем считать множество I конечным (хотя в современной теории игр рассматриваются множества и с бесконечным

числом игроков). Обычно принято различать игроков по их номерам, т.е. считать $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

2. Каждый игрок из множества имеет в своем распоряжении некоторое множество S_i возможных действий, которые в теории игр называются стратегиями.
3. Если игрок имеет только одну стратегию, то его действия оказываются заранее определенными и он фактически не принимает участия в игре.
4. Процесс игры состоит в выборе каждым из игроков одной своей стратегии. В результате каждой партии игры складывается система стратегий $(s_1, s_2, \dots, s_n) = d_j$, которая называется ситуацией. Множество всех ситуаций обозначают через:

$$D = \prod_{i \in I} d_i$$

5. В каждой ситуации d_j игроки получают выигрыши. Отрицательный выигрыш игрока называется проигрышем.

Существующие игровые модели разделяют на:

1. игры с нулевой суммой;
2. антагонистические и неантагонистические (последние разделяются на коалиционные и бескоалиционные).

Антагонистические игры – игровые модели, в которых не бывает ничьих, т. е. один из соперников всегда выходит победителем.

Рассмотрим основные этапы построения типичных игровых моделей на простых примерах.

Игры с нулевой суммой

В этих игровых моделях предполагается, что результатом является плата, которую в соответствии с правилами проигравший платит выигравшему.

Ради простоты рассмотрим игровую модель, в которой участвуют два игрока А и В, при этом проигрыш одного, например В, равен выигрышу другого А и наоборот.

Основной задачей при решении игровых моделей является поиск наилучшего способа игры для каждого из игроков, т.е. *оптимальной стратегии*. Для полного определения этой игры задают таблицу платежей – *платежную матрицу*.

Например, рассмотрим игровую модель с двумя игроками А и В. У игрока А есть три возможных варианта поведения (стратегии), а у игрока В – 4 стратегии. То-

гда для игроков А и В можно записать платежную матрицу игры в виде следующей таблицы. В дальнейшем выбор игроками модели поведения (одной из стратегий) будет определять результат игры:

		В			
		1	2	3	4
А	1	5	4	8	9
	2	0	-2	5	7
	3	1	-1	3	6

- Игрок А должен выбрать одну из стратегий – какую-либо строку матрицы.
- Игрок В, не зная результаты его выбора, должен выбрать один из столбцов – стратегий.

Положительное число, стоящее на пересечении выбранных строки и столбца определяет выигрыш игрока А, отрицательное – выигрыш игрока В.

Так, если А выберет 2-ю строку (стратегию), а В – 3 стратегию (столбец), то А выигрывает 5 единиц, а В их проигрывает.

В теории игр считается, что игроки осторожны и целью каждого из них, в худшем варианте, является – *максимальный выигрыш из наименьших возможных* (гарантированных) или *минимальный проигрыш из максимально возможных*.

Игроку А выгодно выбрать 1 стратегию (максимальный выигрыш 9). Для игрока В выгодна стратегия 2 (максимальный выигрыш 2). Таким образом, найдены оптимальные стратегии для игроков А и В. Найденное на пересечении число 4 – является ценой игры.

Цена игры – это та плата, которую получает оптимально играющий игрок, играя с другим оптимально играющими игроками.

Для быстрого поиска оптимальных стратегий игроков используют следующее свойство платежной матрицы:

Если наибольшему из минимальных выигрышей соответствует в точности наименьший из максимальных проигрышей, т.е., если минимум в какой либо строке совпадает с максимумом в столбце – эти строка и столбец являются оптимальными стратегиями игроков, а точка их пересечения называется седловой.

Рассмотрим следующий пример. Пусть платежная матрица имеет вид:

Учитывая рассмотренные выше рассуждения, наибольшему из минимальных вы-

		В				min
		1	2	3	4	
А	1	5	3	1	2	1
	2	6	5	4	6	4
	3	-2	-3	1	8	-3
max		6	5	4	8	4

игрышей соответствует 2 стратегия игрока А. Наименьшему из максимальных проигрышей – 3 стратегия игрока В.

Таким образом, седловой точкой будет являться 4, а выбранные стратегии – оптимальными. Гарантированный максимальный из минимальных выигрыш А равен 4, минимальный из максимально возможных проигрыш В – 4.

В отличие от приведенных примеров, часто существуют игровые модели с платежными матрицами, которые не имеют седловых точек, например:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ - не имеет седловой точки}$$

В этом случае оптимальные стратегии игроков определяются при многократной игре с одной и той же матрицей и выбранными стратегиями с определенными частотами применения этих стратегий. В отличие от обычной ЧИСТОЙ стратегии эти стратегии называются СМЕШАННЫМИ и, как показано в теории игр, для любой игры с нулевой суммой всегда существует оптимальные смешанные стратегии. Рассмотрим следующий пример.

В некотором районе города расположено промышленное предприятие, использующее устаревшие очистные сооружения и технологии, которые не удовлетворяют экономическим показателям эффективности его работы. Вследствие этого оно вынуждено периодически производить сбросы неочищенных сточных вод в водоем (река, пруд, море) и выбросы вредных веществ в атмосферу. В зависимости от метеорологического состояния, сезона года, условий работы соседних предприятий и прочего, контролирующими природоохранными органами превышения норм загрязнения воздуха и воды экспресс-анализом могут быть обнаружены или не обнаружены.

Если на существующем оборудовании организована очистка стоков и выбросов удовлетворяющая установленным нормам, потери связанные с издержками производства и, как следствие, удорожанием готовой продукции составят –10.

При этом если проводился экспресс-анализ контролирующими органами, который подтвердил допустимые нормы по уровням загрязнения воздуха и воды, предприятию возмещаются издержки (например, через снижение процентов различных налоговых отчислений в бюджет и местные органы) и его потери будут равны 0.

В случае сброса и выброса загрязняющих веществ в окружающую среду без очистки, штрафные санкции будут составлять -40 .

Требуется найти оптимальные стратегии для игроков.

Для этого составим платежную матрицу:

		Экспресс-анализ	
		Проводился (y)	не проводился ($1-y$)
Пред- приятие	Очистка (x)	0	-10
	Без очистки ($1-x$)	-40	0

Полученная матрица не имеет седловых точек. Значит, существуют оптимальные смешанные стратегии для каждого из игроков.

Пусть предприятие выбирает свою первую стратегию с частотой x , а вторую с частотой $(1-x)$. Аналогично для стратегий контролирующих органов обозначим частоты через y и $(1-y)$.

Таким образом, средний выигрыш, который получить предприятие, составит:

$$E(x, y) = -40 \cdot y \cdot (1-x) + 0 \cdot x \cdot y - 10 \cdot x \cdot (1-y) + 0 \cdot (1-x) \cdot (1-y)$$

$$E(x, y) = -40 \cdot y \cdot (1-x) - 10 \cdot x \cdot (1-y) = 50 \cdot x \cdot y - 10 \cdot x - 40 \cdot y$$

Далее x и y необходимо выбрать такими, чтобы величина выигрыша $E(x, y)$ была бы максимальной. Для этого найдем экстремум этой функции:

$$\frac{\partial(50xy - 10x - 40y)}{\partial y} = 50x - 40 = 0; \quad x = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial(50xy - 10x - 40y)}{\partial x} = 50y - 10 = 0; \quad y = \frac{1}{5}$$

Оптимальные стратегии найдены. Полученный результат говорит о том, что в сложившихся условиях предприятие должно не менее чем в 4-х случаях из 5 контролировать и проводить очистку своих выбросов и сбросов загрязняющих веществ в окружающую среду. Контролирующие органы наоборот – не менее чем в 1 из 5 случаев должны выполнять экспресс-анализ состояния окружающей среды.

Бескоалиционные игровые модели в задачах охраны окружающей среды

Часто в задачах природопользования в условиях ограниченности какого-либо ресурса возникает проблема его распределения с учетом интересов потребителей. Игроками в такой игре являются потребители ресурса. На основании этого представ-

ления можно получать различные способы распределения ресурса, используя известные в теории игр принципы оптимальности, например "равновесие по Нэшу".

На практике резкое снижение полезности ресурса, когда его общий объем, израсходованный (или накопленный) потребителями, превысил заданную величину, происходит не всегда. Тем не менее, снижение полезности можно обосновать с точки зрения охраны окружающей среды и ввести штрафы за "перерасход" ресурса. В связи с этим появляется проблема определения размеров штрафов. Часто используемый для этого подход состоит в обосновании размеров штрафов исходя из величины затрат, необходимых на восстановление ресурса. Это во многих случаях приводит к тому, что размеры назначаемых штрафов либо очень велики, что затрудняет их практическое использование, либо так малы, что потребители предпочитают уплатить штраф вместо выполнения нормативных требований по расходованию ресурса.

В такой ситуации целесообразным является использование такого подхода, при котором размер штрафа превышает величину "выигрыша", который получает потребитель, когда превышает "перерасход" ресурса.

Бескоалиционной игрой называется такая модель, где каждый из игроков старается максимизировать свой выигрыш. Здесь любую ситуацию игрок пытается изменить с помощью своей стратегии таким образом, чтобы его выигрыш был максимальным.

Для простоты рассмотрим игру n игроков, где для любого игрока i число стратегий равно двум: $S_i = \{1, 2\}$. В этом случае каждая смешанная стратегия игрока i полностью описывается вероятностью:

- 1) x_i - выбора им 1-й чистой стратегии;
- 2) $(1 - x_i)$ - выбора им 2-й чистой стратегии.

Таким образом, множество всех ситуаций в смешанных стратегиях можно представить, как единичный n – мерный куб. Ситуации в чистых стратегиях будут соответствовать вершинам этого куба, и их количество будет определяться как число чистых стратегий у каждого из игроков в степени равной числу игроков:

$$D = S^n$$

Всякая вершина куба ситуаций может быть задана как n - членная последовательность единиц и двоек. Для того, чтобы ее выделить среди всех вершин, следует

указать множество всех игроков, выбирающих в этой ситуации свою первую стратегию.

Опишем множество всех ситуаций, приемлемых в игре для данного игрока i . Обозначим через:

- 1) *A-группу* всех игроков, выбирающих 1-ю стратегию;
- 2) *B-группу* остальных игроков, выбирающих 2-ю стратегию.

Пусть d_i – произвольная ситуация в смешанных стратегиях, и для каждого игрока $j \in I$ и $j \neq i$ обозначим через:

$$d_i = \prod_{\substack{j=A \\ j \neq i}} x_j \cdot \prod_{\substack{j=B \\ j \neq i}} (1 - x_j)$$

Согласно теореме Нэша «в каждой бескоалиционной игре существует хотя бы одна ситуация равновесия», т.е. выполняется неравенство:

$$\sum_{i=1} H_i(1) \cdot d_i \leq \sum_{i=1} H_i(2) \cdot d_i, \quad (1)$$

где $H_i(1)$, $H_i(2)$ – плата игрока i при выборе им 1 и 2 стратегии в ситуации d_i .

Рассмотрим следующий пример конфликта в области охраны окружающей среды. Каждое из трех предприятий (игроки x , y , z), которые пользуются для технических целей водой из некоторого природного водоема, располагает двумя чистыми стратегиями: строить очистные сооружения для отработанной после технологического цикла воды (стратегия 1) или же сбрасывать ее без очистки (стратегия 2).

Предполагается, что возможности водоема и особенности технологических процессов на предприятиях таковы, что в случае, когда неочищенную воду сбрасывает только одно из трех предприятий, то вода в водоеме остается пригодной для использования, и предприятия дополнительные убытки не несут, их потери равны 0.

Если же неочищенную воду сбрасывают два и более предприятий, то каждый потребитель воды несет убытки в размере 3-х единиц. Стоимость использования очистных сооружений обходится каждому предприятию в 1 единицу.

Изобразим куб ситуаций для описанной игры и укажем при его вершинах значения выигрышей игроков. Возможны $2^3=8$ ситуаций:

$$(1,1,1); (2,1,1); (1,2,1); (2,2,1); (1,1,2); (1,2,2); (2,1,2); (2,2,2)$$

Далее запишем соотношение «равновесия по Нэшу», например, для игрока z .

1) левая часть "неравенства Нэша", характеризует ситуаций, в которых 3-й игрок выбирает 1-ю стратегию:

$$\sum_{i=1}^4 H_i(1) \cdot d_{1i}$$

ситуация (1,1,1)	$d_{111} = x \cdot y$	$H_1(1) = -1$
ситуация (2,1,1)	$d_{211} = (1-x) \cdot y$	$H_2(1) = -1$
ситуация (1,2,1)	$d_{121} = x \cdot (1-y)$	$H_3(1) = -1$
ситуация (2,2,1)	$d_{221} = (1-x) \cdot (1-y)$	$H_4(1) = -4$

получаем сумму:

$$-x \cdot y - (1-x) \cdot y - x \cdot (1-y) - 4 \cdot (1-x) \cdot (1-y)$$

2) правая часть "неравенства Нэша", характеризует игру, в которых 3-й игрок выбирает 2-ю стратегию:

$$\sum_{i=1}^4 H_i(2) \cdot d_{2i}$$

ситуация (1,1,2)	$d_{112} = x \cdot y$	$H_1(2) = 0$
ситуация (2,1,2)	$d_{212} = (1-x) \cdot y$	$H_2(2) = -3$
ситуация (1,2,2)	$d_{122} = x \cdot (1-y)$	$H_3(2) = -3$
ситуация (2,2,2)	$d_{222} = (1-x) \cdot (1-y)$	$H_4(2) = -3$

получаем сумму:

$$-3 \cdot (1-x) \cdot y - 3 \cdot x \cdot (1-y) - 3 \cdot (1-x) \cdot (1-y)$$

после подстановки в неравенство:

$$\sum_{i=1}^4 H_i(1) \cdot d_i \leq \sum_{i=1}^4 H_i(2) \cdot d_i$$

и упрощений, получаем:

$$(1-3 \cdot x) \cdot (1-3 \cdot y) \geq 3 \cdot x \cdot y$$

Аналогично составляются множества ситуаций для двух остальных игроков y и x .

$$(1-3 \cdot x) \cdot (1-3 \cdot z) \geq 3 \cdot x \cdot z$$

$$(1-3 \cdot y) \cdot (1-3 \cdot z) \geq 3 \cdot y \cdot z$$

Пересечение множества приемлемых ситуаций для каждого из игроков является множеством ситуаций равновесия, т.е. следующие равенства:

$$\frac{(1-3x)}{3x} = \frac{y}{(1-3y)} \quad \frac{(1-3x)}{3x} = \frac{z}{(1-3z)} \quad \frac{(1-3y)}{3y} = \frac{z}{(1-3z)}$$

поэтому:
$$\frac{(1-3x)}{3x} = \frac{(1-3z)}{3z}$$

т.е. $x = y = z$, тогда

$$(1-3 \cdot x) \cdot (1-3 \cdot x) = 3 \cdot x \cdot x \quad (1-3 \cdot z) \cdot (1-3 \cdot z) = 3 \cdot z \cdot z \quad (1-3 \cdot y) \cdot (1-3 \cdot y) = 3 \cdot y \cdot y$$

Ситуация (2, 2, 2) наименее выгодна как с точки зрения охраны природы так и с точки зрения величины выигрыша игроков, поскольку в этой ситуации загрязнение больше, а выигрыши игроков меньше, чем в других приемлемых ситуациях. В данной игре имеются и две более бережные по отношению к природе ситуации равновесия, значения которых получают:

$$1 - 6x + 6x^2 = 0$$

$$1 - 6y + 6y^2 = 0$$

$$1 - 6z + 6z^2 = 0$$

т.е. вероятность выбора каждым из игроков своей 2-й стратегии равна:

$$\left(\frac{1}{3+\sqrt{3}}, \frac{1}{3+\sqrt{3}}, \frac{1}{3+\sqrt{3}} \right) \text{ и } \left(\frac{1}{3-\sqrt{3}}, \frac{1}{3-\sqrt{3}}, \frac{1}{3-\sqrt{3}} \right)$$

Предпоследняя ситуация наиболее выгодная. Потери каждого из игроков в ней минимальны.

Игровая модель с использованием целевой функции

Специфический раздел теории игр занимают игровые модели, в которых человек, принимающий решения ведет игру с природой, состояние которой ему полностью не известно. Общая схема подобных задач следующая:

1. Лицо, принимающее решение имеет возможность сделать выбор из n возможных действий;
2. Далее определяется полезность каждого действия в зависимости от набора условий, одно из которых выполнится наверняка. Эти условия называют состоянием природы.
3. Проводится сбор информации, которая с некоторой вероятностью дает данные о том, в каком состоянии находится природа. Сбор информации, как правило, связан с дополнительными материальными и другими затратами.

В этих игровых моделях дополнительно к платежной матрице составляют матрицу риска. На основе двух матриц платежной и риска строят целевую функцию прибыли (убытка) используя теорию полезности, в которой:

1. каждое действие оценивают по наилучшему для него состоянию природы;

2. наилучшим решением является то, при котором будет достигнут экстремум целевой функции: максимум – для прибыли, и минимум – убытка.

Оптимальной стратегией (или *максиминным критерием*) считается та, которая приводит к наилучшему из наихудших состояний, т.е. обеспечивает наилучший ответ на наихудшее состояние природы. Эта стратегия является стратегией осторожного, пессимистичного игрока.

Оптимальную стратегию для отрицательной полезности называют *минимаксным критерием*.

Кроме минимаксного и максиминного критерия используют критерии, учитывающие наилучшее состояние, комбинацию наилучшего и наихудшего. Следует отметить, что целевая функция часто находится в сильной зависимости и от искусства решающего, и от некоторых черт его характера (пессимист он или оптимист).

Рассмотрим следующий упрощенный пример. В горной местности (например, Закарпатье), вследствие бесконтрольной вырубке лесов, каждой весной возникает вероятность наступления экологического бедствия связанного со сходом селевых потоков на нижерасположенные промышленные, хозяйственные и жилые постройки. В связи с этим, можно выделить два крайних состояния природы для рассматриваемого региона:

B_1 – благоприятная, теплая, не дождливая, с постепенным и медленным таянием снегов весна;

B_2 – неблагоприятная погода с затяжными обильными дождями, с быстрым таянием снегов и, как следствие, образованием горных селевых потоков с дальнейшими, возможными тяжелыми последствиями для окружающей среды.

У местных органов власти имеется возможность предпринять одно из трех действий:

a_1 – не предпринимать ни каких мер и оставить существующие естественные и искусственные сооружения как есть;

a_2 – выполнить профилактические работы по восстановлению замеченных внешних разрушений фундаментов дамб, плотин и других сооружений;

a_3 – провести дополнительное укрепление дамб, плотин и берегов со строительством новых резервных заградительных противоселевых сооружений, а также провести работы по восстановлению лесонасаждений и кустарников.

Состояние природы	Возможные действия		
	a_1	a_2	a_3
Благоприятное B_1	0	1	3
Неблагоприятное B_2	5	3	2

Какую оптимальную стратегию необходимо выбрать?

Составим платежную матрицу, в которой числа будут характеризовать потери в том случае, если предпринятые меры не будут соответствовать состоянию природы. Эти значения могут означать, например, потери в случае разрушений, затраты на профилактические работы и новые сооружения и т.д.

До выбора одного из действий, были получены предварительные сведения – прогноз из бюро погоды:

x_1 – в целом ожидается установление ясной погоды;

x_2 – ожидается переменная облачность;

x_3 – ожидается дождь.

Состояние природы	Результат наблюдения		
	x_1	x_2	x_3
Благоприятное B_1	0,7	0,2	0,1
Неблагоприятное B_2	0,15	0,35	0,5

На основании многолетней истории известно вероятностное соответствие между результатами наблюдений и

состоянием природы.

Таким образом, всего имеется $3^3=27$ различных стратегий:

- 1) от крайне легкомысленной – на любой из прогнозов x_1, x_2, x_3 – одна стратегия a_1, a_1, a_1 ;
- 2) полной веры в прогноз – a_1, a_2, a_3 ;
- 3) до пессимистической стратегии – a_3, a_3, a_3 .

Результат	Стратегии								
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	...	S_{25}	S_{26}	S_{27}
x_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	...	a_3	a_3	a_3
x_2	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	...	a_3	a_3	a_3
x_3	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	...	a_1	a_2	a_3

Потери для каждой из существующих стратегий, по каждому из состояний погоды, можно определить через суммы следующих произведений.

- для состояния погоды B_1 :

$$S_1(B_1) = x_{1B_1} \cdot a_{1B_1} + x_{2B_1} \cdot a_{1B_1} + x_{3B_1} \cdot a_{1B_1} = 0.7 \cdot 0 + 0.2 \cdot 0 + 0.1 \cdot 0 = 0$$

- для состояния погоды B_2 :

$$S_1(B_2) = x_{1B_2} \cdot a_{1B_2} + x_{2B_2} \cdot a_{1B_2} + x_{3B_2} \cdot a_{1B_2} = 0.15 \cdot 5 + 0.35 \cdot 5 + 0.5 \cdot 5 = 5$$

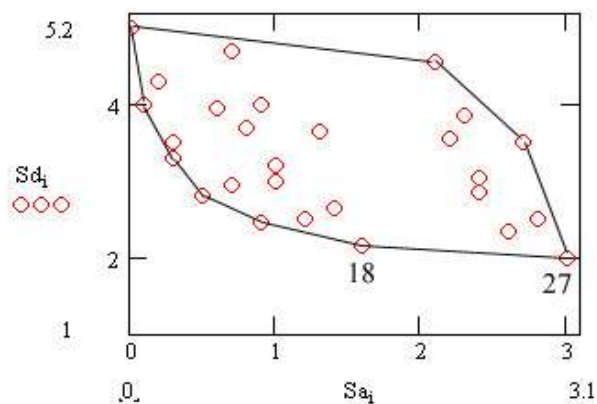
и т.д.

Состояние природы	Стратегии								
	S_1	S_2	S_3	S_4	...	S_5	...	S_{26}	S_{27}
B_1	0	0,15	0,45	0,25	...	1,8	...	2,7	3
B_2	5	4	3,5	4,4	...	2,2	...	2,5	2

Чтобы сравнить потери от каждой стратегии, изобразим их геометрическими точками в координатах состояний погоды: горизонтальная ось – B_1 , вертикальная ось – B_2 .

Из рисунка видно, что стратегия тем лучше, чем *левее* к началу координат и *ниже* расположена изображающая ее точка. Множество всех смешанных стратегий будет выпуклым, и лежать внутри многоугольника.

Для выбора оптимальной стратегии P необходимо использовать минимаксный критерий. Эта стратегия будет обеспечивать минимум максимальных потерь. Точка стратегии P оказалась лежащей между стратегиями S_{18} и S_{27} . Для точного выбора оптимальной смешанной стратегии (положения точки P по отношению к точкам S_{18} и S_{27}), необходима дополнительная информация о возможном состоянии погоды, например, полученная в результате статистической обработки данных, накопленных за несколько последних лет: B_1 состоится с вероятностью 0,25, а B_2 – с вероятностью



0,75.

В этом случае для каждой стратегии S_{18} и S_{27} вычисляются соответствующие ей средние потери. Далее выбирается стратегия, у которой достигается минимум средних потерь. Эта стратегия называется *байесовской* (Байес – известный английский математик 18 века).

ский математик 18 века).

Моделирование экосистем на основе теории графов

Экологические объекты в подавляющем большинстве случаев представляют собой многокомпонентные системы множественными внутренними связями между компонентами. Моделирование многокомпонентных систем – основа решения разнообразных эколого-экономических задач.

Одной из особенностей многокомпонентных систем является некоторая запаздывающая реакция её компонентов на изменение состояния окружающей среды и других компонентов этой же системы, которые связаны с ней непосредственно или опосредствованными связями.

Можно сказать, что в экосистемах существует некий элемент памяти: события, происшедшие в прошлом, непосредственно сказываются на событиях в настоящем времени. В таких условиях динамическая модель экосистемы, которая характеризуется переменными для её компонентов V_k принимает вид интеграла:

$$\frac{d}{dt} \cdot V_k(t) \equiv \dot{V}_k(t) = \int_{-\infty}^t F_k[t-t^*, V_1(t^*), V_2(t^*), \dots, V_n(t^*)] \cdot dt^* \quad (0)$$

Если параметры окружающей среды не изменяются, то все моменты времени будут равноправны (это свойство называют однородность времени). Поэтому характеристики системы, которая существует в стабильных условиях окружающей среды не будут зависеть от выбора начала отсчета на оси времени (точки $t=0$), а зависимость функции F_k от моментов времени t и t^* может быть задана только их разницей $(t - t^*)$.

Мощным математическим инструментом решения задач моделирования многокомпонентных систем, описываемых уравнением (1), является теория графов.

Родоначальником теории графов принято считать математика Леонардо Эйлера (1707-1783). Первая работа о графах принадлежала Л. Эйлеру и появилась в 1736 году (задача “можно ли обойти семь Кенигсбергских мостов, проходя только один раз через каждый из них”). В дальнейшем над графами работали Кениг (1774-1833), Гамильтон (1805-1865), из современных математиков – К. Берж, О. Оре, А. Зыков.

В моделировании экосистем применяют главным образом ориентированные графы (орграфы), которые позволяют моделировать потоки в системе и обратные связи. Благодаря простоте и наглядности математический аппарат теории графов на-

ходит широкое применение среди специалистов, которые не владеют глубокими познаниями в прикладной математике.

В основе теории графов лежит геометрический и комбинаторный подход к задачам моделирования объекта. Рассмотрим основные понятия из этой теории.

Основные понятия теории графов

Предметом первых задач в теории графов были конфигурации, состоящие из точек и соединяющих их линий. В этих рассмотрениях было несущественно, прямые ли это линии или же они являются криволинейными непрерывными дугами, соединяющими две концевые точки, где расположены эти линии, являются ли они длинными или короткими. Существенно только то, что они соединяют две данные точки.

Это приводит к определению графа как абстрактного математического понятия.

Графом называется совокупность конечного числа точек, называемых вершинами графа, и попарно соединяющих некоторые из этих вершин линий, называемых ребрами или дугами графа.

В дальнейшем вершины графа мы будем обозначать латинскими буквами a, b, c, d . Иногда граф в целом будем обозначать одной заглавной буквой. Граф

$$G = G(V) \quad (1)$$

с множеством вершин V есть некоторое семейство сочетаний или пар вида:

$$E = (a, b), \quad (2)$$

где a и $b \in V$, указывающее, какие вершины считаются соединенными.

В соответствии с геометрическим представлением графа каждая конкретная пара (2) называется ребром графа; вершины a и b называются концевыми точками или концами ребра E .

Можно использовать и другой подход. Если даны два множества V_1 и V_2 , то можно образовать множество всех пар

$$(v_1, v_2), v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

Это множество пар называется произведением и обозначается через $V_1 \times V_2$. В нашем случае каждая пара вершин (a, b) есть элемент произведения $V_1 \times V_2$. Таким образом, можно сказать, что граф G из формулы (1) с данными ребрами (2) есть некоторое подмножество произведения $V_1 \times V_2$.

Это определение графа должно быть дополнено в одном важном отношении. В определении ребра (2) можно принимать или не принимать во внимание порядок расположения двух его концов. Если этот порядок несуществен, т. е. если

$$E = (a, b) = (b, a),$$

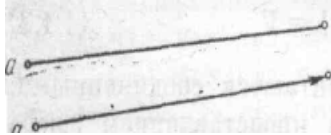
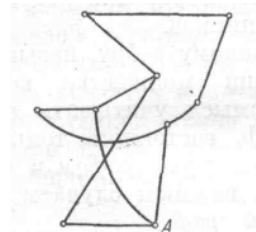


Рис.1

то говорят (рис.1), что E есть неориентированное ребро; если же этот порядок существен, то E называется ориентированным ребром (дугой). В последнем случае a называется

также начальной вершиной, а b — конечной вершиной ребра E . Можно также говорить, что E есть ребро, выходящее из вершины a и входящее в вершину b . Как в случае ориентированного, так и в случае неориентированного ребра говорят, что ребро E из (2) инцидентно вершинам a и b , а также что a и b инцидентны E .



Граф называется неориентированным, если каждое его ребро не ориентировано, и ориентированным, если ориентированы все его ребра. На рис. 2 приведены примеры неориентированных графов. На рис. 3 изображены ориентированные графы.

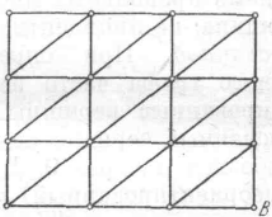


Рис.2

В задачах охраны окружающей среды Ориентированный граф (орграф) рассматривают как геометрический объект, составленный из вершин, которые обозначают, например, компоненты экосистемы и дуг, соединяющих попарно некоторые из вершин. Здесь дуги обозначают связи между компонентами эко-

системы.

В отличие от простого (неориентированного) графа, начало и конец дуг орграфа строго определены через задание определенного направления (ориентации). По этой причине дуги изображают направленными отрезками прямых, кривых или ломанных линий. Применительно к уравнению (0) из вершины k в вершину j направлена дуга только тогда, когда в состав аргументов функции F_j входит параметр V_k .

В этом случае, примером ориентированного графа может выступать цепь питания для луговой экосистемы (рис.4).

Орграфы позволяют моделировать системы с потоками энергии и вещества. Кроме того, с их помощью можно моделировать причинно-следственные связи в

системе. Здесь из начальных вершин выходят дуги, которые обозначают источники и первопричины. Конечные вершины обозначают стоки и следствия.

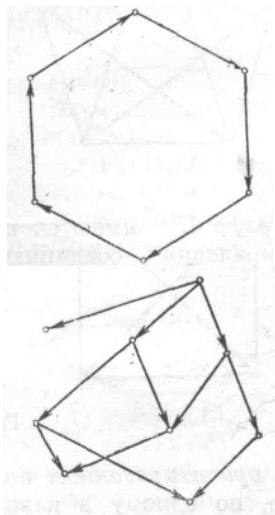


Рис.3

Иногда (кроме букв) вершины обозначают числами, тогда для обозначения дуги используются пары соответствующих чисел, первое из которых – это номер начальной вершины, а второе – номер конечной вершины.

В ряде случаев естественно рассматривать смешанные графы, имеющие как ориентированные, так и не ориентированные рёбра. Например, план города можно рассматривать как граф, в котором рёбра представляют улицы, а вершины – перекрестки; при этом по одним улицам может допускаться лишь одностороннее движение, и тогда на соответствующих рёбрах вводится ориентация; по другим улицам движение двустороннее, и на соответствующих рёбрах уже никакой ориентации не вводится.

Как уже отмечалось, при фактическом изображении графа имеется большая свобода в размещении вершин и в выборе формы соединяющих их дуг. Поэтому может оказаться, что один и тот же граф представляется совсем различными чертежами. Будем говорить, что два графа G и G' изоморфны, если существует такое взаимно однозначное соответствие между множествами их вершин V и V' , что вершины соединены рёбрами в одном из графов в том и только в том случае, когда соответствующие им вершины соединены в другом графе. Если рёбра ориентированы, то их направления также должны соответствовать друг другу. Для нас в дальнейшем всюду будет несущественно, какое именно изображение графа используется, так как все изоморфные графы имеют одни и те же свойства.

Вершины графа, которые не принадлежат (не инцидентна) ни одному ребру, называются изолированными. Граф, состоящий только из изолированных вершин, называется нуль-графом (обозначается: O' – граф).

Граф, в котором каждая пара вершин соединена ребром, называется полным. Обозначается: U' – граф, состоящий из n вершин и рёбер, соединяющих всевозможные пары этих вершин. Такой граф можно представить как n -угольник, в котором

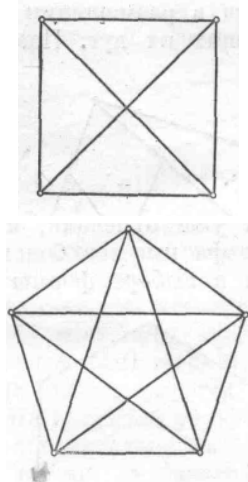


Рис.5

проведены все диагонали. На рис.5 даны схемы полных графов для множеств вершин из четырех и из пяти элементов.

Степенью вершины называется число ребер, которым принадлежит вершина. Обозначение: $p(A)$ – степень вершины A . Например, на рисунке 2.1: $p(A)=2$, $p(B)=2$, $p(C)=2$, $p(D)=1$, $p(E)=1$.

Граф, степени всех k вершин которого одинаковы, называется однородным графом степени k .

Дополнением данного графа называется граф, состоящий из всех ребер и их концов, которые необходимо добавить к исходному графу, чтобы получить полный граф.

Граф, который можно представить на плоскости в таком виде, когда его ребра пересекаются только в вершинах, называется плоским. Например, на рисунке 2.8 показан плоский граф, изоморфный (равный) графу на рисунке 2.5.

Многоугольник плоского графа, не содержащий внутри себя никаких вершин или ребер графа, называют его гранью.

В зависимости от полноты моделирования, экосистема может быть изображена в виде простого, знакового или взвешенного орграфа.

Знаковым называют граф, каждой дуге которого, кроме направления, приписывают знак “+” или “—”. Знак “+” приписывают дуге тогда, когда рост компонента с номером k ведет к росту компонента с номером j , т. е. когда:

$$\frac{\partial F_j}{\partial V_k} > 0$$

Если рост компонента k снижает (ослабляет) компонент j , т. е.:

$$\frac{\partial F_j}{\partial V_k} < 0 \quad ,$$

дуге приписывают знак “—”.

Взвешенным называют граф, дугам которого приписывают не только знак, но и определенное числовое значение – вес. Как правило, вес дуги пропорционален производной:

$$\frac{\partial F_j}{\partial V_k}$$

Если связь между компонентами экосистемы может характеризоваться определенным запаздыванием, на дугах орграфа также обозначают время задержки (или величину, пропорциональную времени задержки). Дуги орграфа могут образовывать путь.

Путь – это такая цепь последовательно соединенных между собой вершин, в которой конец каждой предыдущей дуги (кроме, возможно, последней) одновременно является началом следующей дуги. Другими словами путем от A до X называется последовательность ребер, ведущая от A к X , такая, что каждые два соседних ребра имеют общую вершину, и никакое ребро не встречается более одного раза. Путь записывают как последовательность вершин: $(1; 2; 5; 7; 4\dots)$ или дуг $\{(1,2); (2,5); (5,7); (2,5);\}$.

Циклом (контуром, кольцом) называется путь, в котором совпадают начальная и конечная точка. Вот пример цикла, проложенного на графе G (рис. 2.9): $(A, B); (B, F); (F, C); (C, D); (D, E); (E, A)$.

Простым циклом называется цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза.

Длиной пути, проложенного на цикле, называется число ребер этого пути. Пример: на графе G (рис. 2.9) проложен простой цикл $(A, B); (B, F); (F, C); (C, D); (D, E); (E, A)$ длина пути этого цикла равна 6.

Две вершины A и B в графе называются связными (несвязными), если в нем существует (не существует) путь, ведущий из A в B .

Граф называется связным, если каждые две его вершины связные; если же в графе найдется хотя бы одна пара несвязных вершин, то граф называется несвязным. На рисунке 2.10 изображен связный граф; на рисунке 2.11 – несвязный (т. к. существует минимум одна пара несвязных вершин – A и D).

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Трехмерной моделью графа-дерева служит, например, настоящее дерево с его замысловато разветвленной кроной; река и ее притоки также образуют дерево, но уже плоское – на поверхности земли (рис.2.12).

Несвязный граф, состоящий исключительно из деревьев, называется лесом. Пример: на рисунке 2.13 изображен лес, состоящий из трех деревьев.

Дерево, все n вершин которого имеют номера от 1 до n , называют деревом с перенумерованными вершинами.

Присутствие цикла в графе системы свидетельствует о наличии обратных связей.

Обратная связь – это такая цепь взаимосвязей в системе, когда изменение какого-нибудь из компонентов системы, которые входят в цепь обратной связи вызывает такую последовательность изменений других компонентов, что в конце-концов отражается на состоянии конечного компонента цепи. Обратные связи бывают позитивными и негативными.

Обратная связь называется позитивной, если изменение состояния некоторого компонента системы вызывает в ней такую цепь изменений, что в конечном итоге способствует усилению первичного отклонения (воздействия).

Обратная связь называется негативной, если эти изменения противодействуют первоначальному воздействию.

Как уже отмечалось, систему без обратных связей изображают графом без циклов: графом – деревом.

Системы с обратными связями моделируют знаковыми и взвешенными графами. Тип обратной связи можно определить по количеству дуг со знаком “–” в соответствующем ей цикле. Если цикл содержит чётное количество дуг, обозначенных знаком “—”, обратная связь является позитивной, а если нечётное — негативной.

Важной характеристикой любой системы является её устойчивость, т. е. способность противостоять любым изменениям своего состояния. Системы без обратных связей при стабильных внешних условиях достаточно устойчивы, поскольку их состояние определяется исключительно состоянием внешней среды. Присутствие минимум одного цикла позитивной “+” обратной связи делает систему абсолютно неустойчивой, т. е. любое изменение её состояния будет неминуемо усиливаться, вызывая в системе радикальные, необратимые изменения.

При наличии в системе одной отрицательной обратной связи система имеет тенденцию к развитию в ней колебательной неустойчивости: незначительное отклонение от равновесия приведёт к появлению периодических колебаний значений параметров системы. Колебания возникают, если для системы характерно запаздыва-

ние реакции компонентов цикла обратной связи. При отсутствии запаздывания, колебания не возникают, потому что флуктуация не успевает развиться в заметное отклонение и затухает из-за последовательности изменений в цепи обратной связи.

При наличии же нескольких контуров поведение системы становится сложным и требует специального анализа.

Устойчивость системы усиливается, если в ней присутствуют механизмы гашения флуктуаций. Затухание обычно вызывается процессами необратимого рассеивания потоков через присутствие множества путей развития флуктуаций. Другими словами, в такой системе должны быть или мощные стоки энергии и вещества (концевые вершины), из которых бы выходили ответвления от основного цикла, или несколько пересекающихся циклов обратной связи.

В устойчивой системе незначительные отклонения от равновесия постепенно затухают и система возвращается к первоначальному состоянию или же, в общем случае, переходит в новое стационарное состояние, близкое к предыдущему.

В неустойчивой системе малые флуктуации вызывают или колебания, или катастрофические изменения с установлением нового равновесия, значительно отличающимся от первоначального.

Итак, мы рассмотрели основные определения теории графов, без которых было бы невозможно доказательство теорем, а, следовательно и решение задач. Формулировки ключевых теорем приведены ниже в приложении. Далее рассмотрим несколько примеров из практики системного подхода к моделированию загрязнения окружающей среды, так называемые “мания”-структуры.

Системное поведение и "мания"-структуры

Если посмотреть вокруг себя, то можно увидеть, что в любой стране ущерб, наносимый природе, возрастает с каждым годом. Почему это происходит? Каким образом можно изменить систему, чтобы уменьшить это отрицательное воздействие?

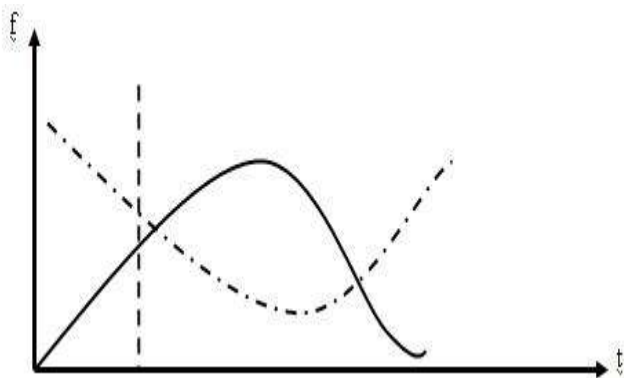


Рис.10. Диаграмма (график) базовой динамики

Дело в том, что ответ не лежит в какой-то одной отдельно взятой области знаний. Нельзя решать эту проблему при помощи только экономики или технических нововведений или биологических разработок по отдельности. Каждая из них вносит свой вклад в изменение ситуации, и нужно рассматривать их во взаимодействии друг с

другом. Рассматриваемая далее простая модель поможет объединить эти факторы в единое целое и перенести основные выводы на похожие системы.

Сначала рассмотрим несколько диаграмм (графиков), которые позволят обсуждать и понимать поведение сложных систем.

График базовой динамики — это очень простая картинка основных типов поведения, которые наблюдаются в системе. Элементы этой картинки: по горизонтальной оси откладывается время (t); по вертикальной оси — существенные факторы системы. Например, если исследуется разрушение окружающей среды во фруктовом саду, то такой базовой динамикой может быть растущее использование пестицидов (сплошная линия). С каждым годом мы вносим их все больше и больше. Одновременно снижается способность экосистемы (пунктирная линия) самой противостоять нападениям всевозможных насекомых: из-за того, что мы вносим пестициды, могут быть отравлены птицы, которые в нормальной ситуации уничтожают этих насекомых.

Иногда базовая динамика может быть разделена на два периода: *исторический* и *будущий*. В этом случае мы пользуемся такой диаграммой для того, чтобы понять, каким образом можно изменить исторические тенденции, устоявшиеся типы поведения, чтобы восстановить состояние здоровья системы.

Чему может служить эта диаграмма? Она помогает группе людей, изучающих ту или иную проблему, прийти к согласию о том, что они одинаково понимают проблемную динамику этой системы. Когда они согласились, прочувствовали эти графики, то они переходят к следующей стадии системного анализа проблемы. Эта стадия — определение причинных связей. И здесь мы пользуемся еще одним типом диаграмм.

1. Причинные связи и кольца обратных связей

$A \rightarrow B$

Эта диаграмма означает, что если “А” меняется, то в результате этого происходит изменение и “В”. Эти изменения могут осуществляться посредством самых разных механизмов. Например, может быть, что информация об “А” заставит кого-то изменить “В”. Если “А” — цена мяса, тогда она влияет на “В” — объем продажи мяса. Механизм воздействия может быть и другой: физический поток какого-то вещества вытекает из “А” и перетекает в “В”. “А” — население, проживающее в деревне, а “В” — население, проживающее в городе.

Мы определяем 2 типа причинных воздействий: положительное (+) и отрицательное (—).

$A \rightarrow \pm B$

Отрицательное воздействие имеет место в случае, когда возрастание “А” приводит к убыванию “В” и наоборот. Наличие отрицательного воздействия вовсе не означает, что это какое-то плохое воздействие, это означает, что направления изменения этих переменных противоположны

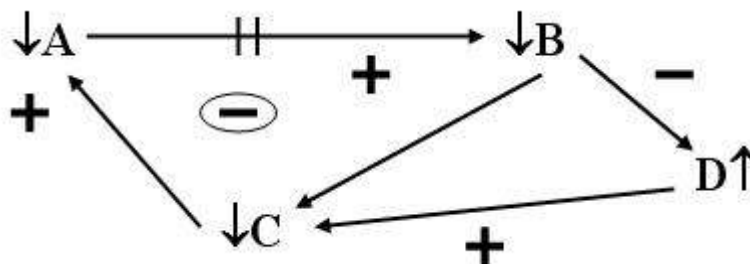
Если причинная связь положительная, то направление изменения обеих переменных происходит в одну сторону.

Иногда должен пройти некоторый конечный промежуток времени, чтобы изменение “А” повлияло на “В”. Это называется запаздыванием и обозначается перечеркнутой стрелкой.

$$A \xrightarrow{++} B$$

У большинства людей понимание причинности изменений, имеющих место в реальной жизни, весьма простое. Они часто пользуются моделями, похожими на вышеуказанные, и если спросить их, почему изменилось “В”, они вам ответят: “Ну как почему, потому что на него влияет “А”, и из-за того, что “А” изменилось, изменилось и “В”. На самом деле эти изменения определяются не одной связью, а значительно более сложной структурой связей.

Обычно цепочки таких причинных связей замыкаются в контуры, кольца обратных связей. При наличии обратной связи мы уже можем сказать, что “В” изменилось, потому что изменилось “В”. Следовательно, “В” становится причиной своего собственного поведения во времени.

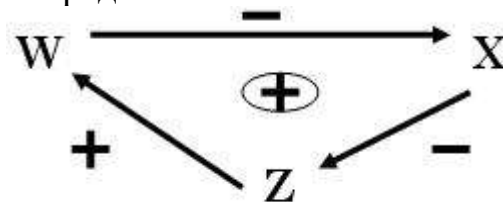


Показанное на рисунке кольцо ABDC — отрицательное. Наличие отрицательного кольца обратной связи определяет гомеостаз системы, т. е. стремление ее к достижению некоторой цели (или способность системы противостоять изменениям и сохранять динамически относительное постоянство состава и свойств). Цель этой системы заключается в том, чтобы удержать, например, переменную “В” на некотором уровне.

Посмотрим, что произойдет, если изменить “В”. Допустим, “В” возросло, тогда двигаясь по внешнему контуру, можно сделать вывод, что “D” уменьшится из-за того, что связь между “В” и “D” отрицательная, далее “С” уменьшится, потому что связь между “D” и “С” положительная, а затем и “А” уменьшится, потому что связь между “С” и “А” положительная. Через некоторое запаздывание уменьшится и “В”, потому что связь между “А” и “В” положительная. Следовательно, отрицательные кольца обратной связи противодействуют внешним воздействиям, стремящимся

изменить переменные системы. Поведение системы отрицательного обратного контура сопротивляется изменениям извне.

Таким образом, чтобы понять, почему сохраняется такое явление, как разрушение окружающей среды, надо найти действующую в этой системе отрицательную обратную связь, которая все время сопротивляется нашим действиям, направленным на сохранение окружающей среды.



Когда количество отрицательных причинных связей в одном контуре четное, он является положительным контуром обратной связи. Поведение, которое генерирует такая структура — либо экспоненциальный рост, либо экспоненциальный коллапс.

2. Анализ посредством контуров обратных связей

Почему у нас такой большой интерес к кольцам обратных связей? Зачем они нужны?

Во-первых, когда начинают заниматься выявлением активных колец обратных связей в системах, обнаруживают, что многие простые кольцевые структуры, которые определяют поведение системы, присутствуют в очень широком диапазоне систем с разным смысловым наполнением.

Так, процессы употребления кофе для пополнения запасов энергии в организме, использование пестицидов для уничтожения насекомых или строительство заводов, которые, с одной стороны, обеспечивают людей рабочими местами, а с другой, разрушают окружающую среду, — все эти процессы имеют одинаковые структуры колец обратных связей.

Во-вторых, общее поведение таких систем определяется в большей степени кольцами обратной связи, а не конкретными значениями весовых коэффициентов, которые определяют силу каждой отдельной причинной связи.

Если хорошо знать поведение во времени одной системы и правильно определить структуру колец обратных связей в ней, а затем исследовать такую же структу-

ру колец обратных связей в другой системе, то практически большую часть своих знаний о поведении первой системы можете считать знаниями о поведении второй системы.

В-третьих, мощным инструментом анализа являются причинно-следственные кольца обратных связей из-за того, что изменение коэффициентов отдельных связей редко приводит к существенному изменению поведения системы. Для того чтобы изменять поведение, нужно менять структуру посредством либо добавления, либо изъятия колец обратных связей.

Эти три положения с первого взгляда не являются очевидными и часто при моделировании концентрируются на определении именно весовых коэффициентов без рассмотрения структуры. Сейчас рассмотрим простую структуру, которая будет иллюстрацией этих положений.

3. Основные адаптивные кольца

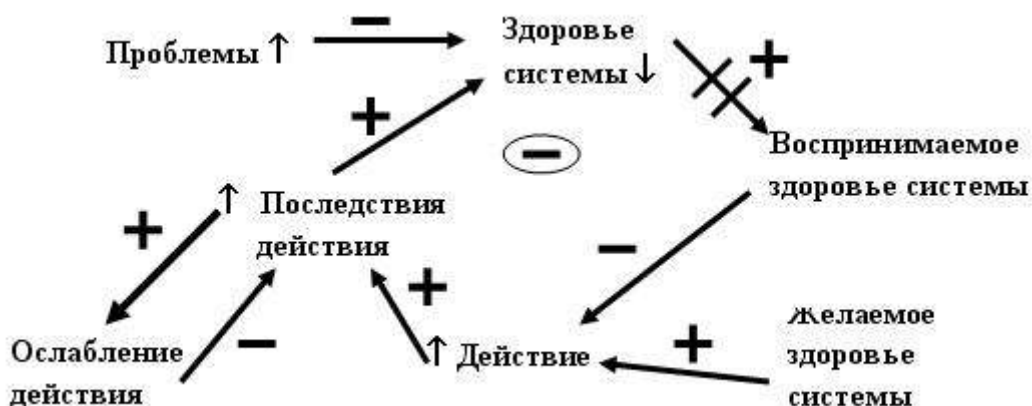
Сначала рассмотрим кольца причинно-следственных связей, которые лежат в основе целенаправленного поведения. Это адаптивные кольца. Представим себе, что появляется некоторая проблема. Чем больше растет проблема, тем условное здоровье системы становится ниже и хуже.

Вообще говоря, непосредственное состояние здоровья системы нам неизвестно, мы можем судить о нем только по некоторым измерениям или опосредованным наблюдениям за внешним состоянием системы.

Например, если мы наблюдаем фруктовый сад, то мы ничего не можем сказать о действительной его способности к самовоспроизведению или его способности сопротивляться нашествию насекомых. И лишь через некоторое время мы сможем отметить, сколько в результате нашествия насекомых будет испорчено веток или плодов, и это будет опосредованный показатель, который позволит нам через некоторое время судить о том, каким было исходное состояние нашего фруктового сада. т. е. вообще говоря, существует запаздывание, связанное с восприятием здоровья системы.

Таким образом, по отношению к любой системе определяют некоторые стандарты или цели, к которым стремятся, или ожидания, которые формируют исходя из знаний о системе. Их называют в общем виде желаемым состоянием (здоровьем) си-

стемы. До тех пор, пока воспринимаемое здоровье системы равно в среднем желаемому здоровью системы, мы не беспокоимся о состоянии этой системы и не предпринимаем никаких действий.



Но по мере роста проблемы здоровье системы падает, через некоторое время воспринимаемое здоровье снижается, тогда из-за появления расхождений между желаемым и воспринимаемым состояниями мы начинаем предпринимать некоторое действие. Это действие приводит к последствиям и, в адаптивных системах, такое последствие противодействует разрушающему влиянию проблемы и возвращает здоровье системы в хорошее состояние.

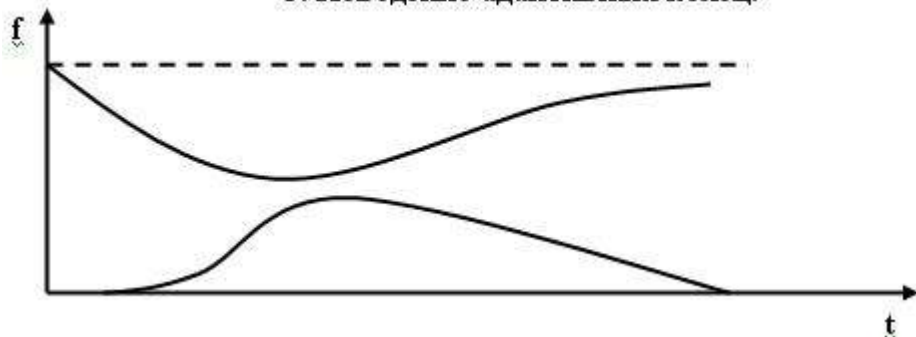
Если запаздывание между действительным состоянием здоровья системы и воспринимаемым здоровьем не очень большое, и если проблема, которая воздействует на систему, не очень серьезная, то мы, действуя указанным выше образом, можем поддержать систему в таком режиме, когда и действительное, и воспринимаемое и желаемое здоровье — все находятся близко друг от друга.

Рассмотрим конкретный пример. Взошло солнце и стало очень жарко. Вы начинаете потеть, в результате этого увеличивается концентрация соли в организме. У вас нет прямого способа измерить концентрацию соли в организме, но у вас быстро появляется ощущение жажды. Так как большинство людей стремится как можно быстрее избавиться от чувства жажды, вы принимаете действие, которое заключается в том, что вы пьете воду и в результате концентрация соли в организме снижается и приходит в норму. Это адаптивное действие.

Рассмотрим другую проблему. Это женитьба (замужество). В результате пространство в доме, которое приходится на вас лично, уменьшается. Вскоре начинают-

ся трения в увеличившейся семье на этой почве. А так как вы хотите снизить уровень трений в семье, вы начинаете больше работать, копить деньги для увеличения жилой площади. И после некоторого запаздывания вы опять имеете для себя достаточное пространство в квартире.

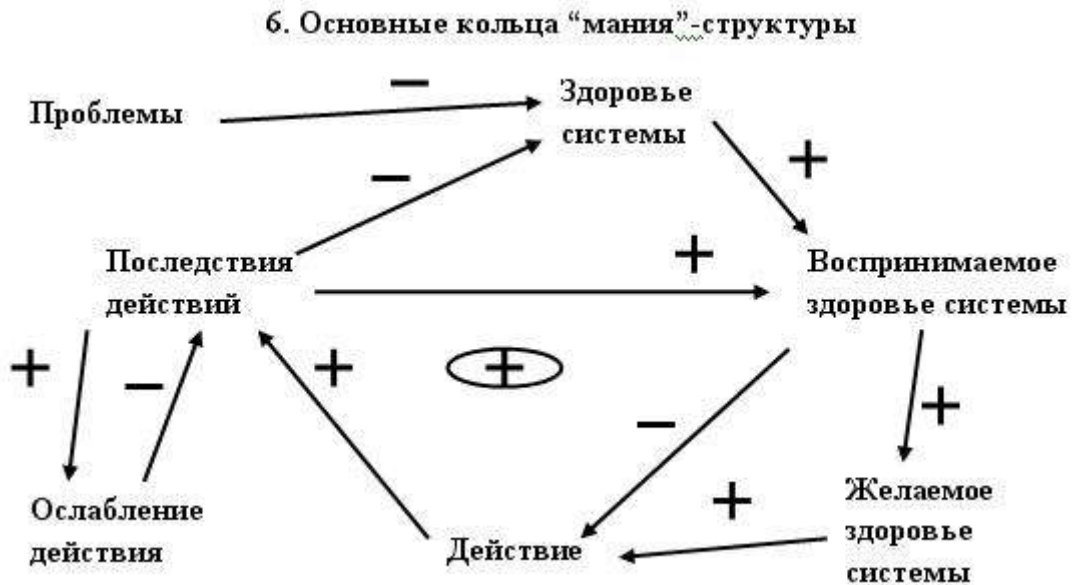
5. Поведение адаптивных колец.



Эти примеры колец обратных связей показывают, что изменения вследствие появления проблемы иногда компенсируют за минуты, а иногда на это уходят десятилетия. Простой пример с водой является иллюстрацией еще одной идеи. Существует такое явление, как некоторое внутреннее ослабление механизма выработки последствия. В примере с водой — постепенно она выходит из организма. И получается, что недостаточно предпринять корректирующее действие только один раз, а его все время надо повторять или как-то равномерно все время производить, для того чтобы поддерживать последствие на достаточно высоком уровне, чтобы оно все время возвращало систему в здоровое состояние. Рассмотрим характерное поведение или базовую динамику такой адаптивной системы (см. рис.).

Допустим, что желаемое состояние здоровья — пунктир, и в самом начале действительное и воспринимаемое состояние системы тоже находятся на этом уровне. Система в равновесии в хорошем состоянии. Вдруг на нас обрушивается проблема. В результате реальное здоровье снижается. После запаздывания, связанного с восприятием, воспринимаемое здоровье тоже начинает снижаться. И когда теперь появляется разница между желаемым и воспринимаемым состояниями, появляется действие, и это действие приводит к последствиям, которые возвращают систему в хорошее состояние. После некоторого запаздывания воспринимаемое состояние здоровья тоже возвращается к норме. Когда же воспринимаемое состояние снова равно желаемому, наши действия прекращаются — опять становятся равными нулю.

Но если имеется ослабление последствия, то действие возвращается не на нулевое значение, а на некоторый не нулевой уровень и поддерживается на этом уровне. Но иногда могут произойти структурные изменения в такой базовой адаптивной системе.



Здесь внесены два изменения в структуру.

1. Это — добавлена одна связь (стрелка) и теперь действие приводит сразу к непосредственному влиянию на воспринимаемое состояние, а не через реальное состояние, как было раньше.
2. После совершения действия усиливается последствия действия и воспринимаемое состояние здоровья улучшается. Кажется, что стало лучше. И теперь это кольцо стало с отрицательной обратной связью. В дополнение к тому, что последствие улучшает воспринимаемое состояние, оно одновременно не улучшает как раньше действительное здоровье, а ухудшает его. И я это показал, поменяв плюс на минус. После такой замены большой контур становится уже положительной обратной связью.

Давайте теперь обсудим поведение такой измененной системы. Начнём с добавленной причинной связи (стрелки).

Например, если я пью кофе, то это в некотором смысле искусственная стимуляция. Это вызывает у меня ощущение, что у меня появилось больше энергии. Но на самом деле от этого не появляется больше энергии. Или, например, если я вношу пестициды во фруктовый сад, то они убивают насекомых, но использование пестици-

дов не увеличивает заложенную природой способность сада уничтожать насекомых. И яблоки выглядят очень красивыми, не пораженными гусеницами и внешне кажется, что сад функционирует в здоровом состоянии. Но на самом деле происходит отравление той системы, которая в обычных условиях содействует уничтожению насекомых (например, одновременно с насекомыми отравляются птицы, которые их уничтожали). Кроме того, увеличивается сопротивляемость самих насекомых к этим пестицидам.

Рассмотрим поведение такой измененной структуры.

Давайте пока предположим, что желаемое состояние системы постоянно. В начале мы начинаем с устойчивого состояния, когда действительное состояние здоровья системы, воспринимаемое и желаемое, все три на одном уровне. И действие — ноль. (На рисунке отмечено внизу). Опять на нас обрушивается проблема. Из-за этой проблемы реальное состояние системы начинает опускаться (сплошная линия), т.е. ухудшаться.

Через некоторое время запаздывания воспринимаемое состояние начинает так же опускаться (верхняя пунктирная линия). Когда появляется ощутимая разница между желаемым и воспринимаемым состояниями, начинается действие (нижняя пунктирная линия). Что происходит? Это действие улучшает воспринимаемое состояние, возвращает его к желаемому. Когда воспринимаемое состояние достигнет желаемого, действие снимается.

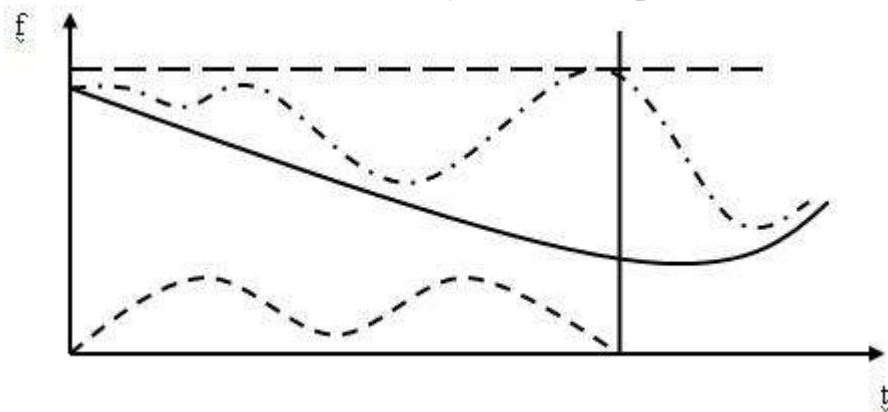
Но в этой системе, какими будут последствия для действительного состояния здоровья? Действительное состояние здоровья системы только ухудшится, и, кроме того, в скором времени последствия действия ослабляются. Воспринимаемое состояние подвергается воздействию реального состояния и в конце концов воспринимаемое спускается к реальному через время запаздывания.

Но теперь вы уже видите, имеет место действительно колоссальная разница между желаемым (пунктиром) и воспринимаемым верхним состояниями. Теперь, для того, чтобы убрать рассогласование, потребуется намного более сильное воздействие.

В результате такого повторного воздействия воспринимаемое состояние опять возвращается к желаемому. Мы прекращаем действие. Но, конечно же, настоящее

здоровье становится еще хуже. Глядя на этот рисунок, можно понять общую тенденцию развития такой системы – проблема становится всё более трудноразрешимой.

В таких ситуациях, кроме ранее предпринимаемого действия, направленного на устранение рассогласования, можно реагировать ещё одним способом – снизить желаемое состояние и тем самым также уменьшить рассогласование между желаемым и воспринимаемым состоянием.



мым и воспринимаемым состоянием.

Например, есть стандарты, регулирующие предельно допустимое содержание веществ, а также максимально допустимые уровни радиации в воде, воздухе и почве, которые не должны быть превышены для населения. Но когда случилась авария на ЧАЭС, увеличилось количество автомобилей в городах, истощились пресные водные ресурсы, изнашивались коммуникации канализационных систем, появилась глубокий конфликт между текущим состоянием и системой стандартов. Сейчас, например, если жители города выйдут из дома на улицу и воздух не такой уж загрязненный, то они скажут: “Какой хороший день!”. Но если бы 20-30 лет назад кто-то попал в такой воздух, которым мы сейчас дышим, он бы сказал: “Это катастрофа!”. Что же было сделано? Просто решили, что допустимый предел будет выше.

Обратите внимание, что если вдруг в точках пересечения вертикальной прямой с линиями состояний, мы прекращаем предпринимать действие, которое разрушает систему, если мы хотим остановить разрушающую динамику, тогда в течение очень долгого времени воспринимаемое состояние будет намного ниже (хуже) любого ранее наблюдаемого значения, т. е. так плохо еще не было во всей истории системы. И вот в этот период система постепенно сама начинает улучшать свое состояние, люди, которые вовлечены в эту систему, имеют ощущение, что хуже этого у них в жизни никогда не было.

Действительно, разница между желаемым и воспринимаемым состояниями никогда не была такой большой, а в кривой части графика она становится наибольшей. Вот почему очень трудно заставить людей прекратить такое связанное с болезненным привыканием поведение. Что можно сделать в такой ситуации и как быть?

Выход надо искать не на пути усиления действия, направленного на получение более сильного последствия в рамках существующей структуры, а на пути изменения той структуры системы, которая ответственна за нежелательную динамику. Что же можно сделать, чтобы изменить такую структуру, чтобы она после этих изменений не производила такого поведения, вредного вовлечения в “мания”-структуру?

Во-первых, не позволять смещаться или ухудшаться желаемому здоровью системы, т. е. поддерживать нормы, стандарты, которым должна удовлетворять система на высоком уровне.

Во-вторых, нужно снизить величину запаздывания при переходе от действительного к воспринимаемому здоровью.

Третье — это добавить последствия противоположного типа. Что это такое? Это добавление такого механизма, который в результате предпринятого вами действия, кроме традиционных последствий, вызовет еще другие последствия — которые в свою очередь очень сильно ухудшат воспринимаемое состояние. Подход заключается в том, что надо запретить каким-то образом совершать вредные действия, сделать их невозможными.

Еще один способ — научить лиц, принимающих решения, в своей деятельности исходить не из краткосрочных последствий, а с учетом продолжительного интервала времени (на перспективу). То же самое с обществом. Необходимо выработать у людей взгляд на то, что они должны обеспечить себе хороший уровень проживания в течение многих десятилетий, а не каких-то коротких промежутков времени.

Анализ устойчивости экосистем. Матрица смежности

На практике анализ многокомпонентной экосистемы на стойкость и прогнозирование динамики изменения её состояния выполняют с помощью матрицы смежности для орграфа данной системы. В этом случае элементы матрицы смежности являются постоянными величинами, а процедуру такого анализа называют импульсной.

Матрица смежности представляет собой квадратную матрицу размерностью $[n \times n]$:

$$m_s = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix},$$

где: n – число вершин орграфа.

Элементы матрицы смежности ($a_{i,k}$) отличны от нуля только в том случае, если в вершину i (номер строки) из вершины k (номер столбца) идёт дуга. Например, для орграфа на рис. 2 соответствует следующая матрица смежности:

$$m_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

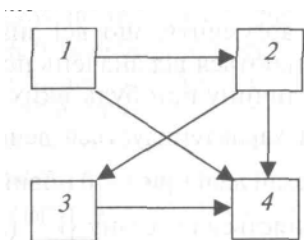


Рис. 2. Орграф

Таким образом, номера строк соответствуют номерам вершин, а числа равные “1” в строках – соответствуют приходящим дугам из других вершин, обозначенных номерами столбцов.

Если в вершину i из вершины k НЕ ИДЁТ дуга, то элемент $a_{i,k}$ матрицы смежности РАВЕН НУЛЮ.

Для знаковых орграфов, в которых дуги дополнительно означают и направление связей знаками “+” или “-“ элементы матрицы смежности для соответствующих дуг также должны быть заданы либо положительными, либо отрицательными числами.

Применение импульсной процедуры заключается в следующем:

1. Строят орграф экосистемы, выделяя в нём лишь наиболее важные, с точки зрения эксперта, связи. В зависимости от глубины задачи и цели моделирования

ограничиваются построением простого, знакового или взвешенного графа и задаются одинаковыми или же индивидуальными для каждой связи (дуги) значениями времени задержки $\tau_{i,k}$.

2. Далее находят наибольший общий делитель (τ) чисел $\tau_{i,k}$ и присваивают каждой дуге целое число, пропорциональное времени задержки, получаемое по соотношению:

$$T_{i,k} = \frac{\tau_{i,k}}{\tau}$$

3. Построив таким образом орграф, для него составляют матрицу смежности m_s .
4. Далее задаются начальным состоянием системы, присваивая каждой из вершин её начальное состояние через вектор v :

$$\vec{v}_i(0) = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad \dots \quad v_n]$$

5. Далее “иницируют” (активизируют) одну или несколько вершин присвоением им отличающегося от нуля начального прироста через вектор p . Другим вершинам приписывают нулевое значение начального прироста, например:

$$\vec{p}_i(0) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \dots \quad 0]$$

6. Начиная с момента времени $t = 0$, весь период прогнозирования разбивают на одинаковые отрезки с определённой продолжительностью. Таким образом, образуется последовательность моментов времени с общим слагаемым вида

$$t_k = k \cdot t$$

7. Далее выполняют расчёт значений прироста в следующие моменты времени опираясь на предыдущие моменты

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^n m_{i,j} \cdot p_j \cdot (k - T_{i,j}), \quad i = 1 \dots n$$

где: $m_{i,j}$ – матрица смежности орграфа.

Если все моменты задержки $\tau_{i,k}$ одинаковые, то все $T_{i,k} = 1$, поэтому:

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^n m_{i,j} \cdot p_j \cdot (k - 1) \quad (1)$$

8. Значения вершин компонентов экосистемы рассчитывают по формуле:

$$v_i(k) = v_i(k-1) + p_i(k-1)$$

9. На основании этих данных строят графики имитации – кривые зависимости значений вершин компонентов экосистемы $v_i(k)$ и их приростов $p_i(k)$ в за-

зависимости от номера шага имитации для всех i от 1 до n . Значения компонентов экосистемы обычно выражают в относительных единицах – баллах.

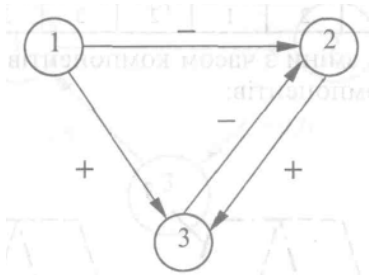


Рис. 3. Орграф экосистемы

Рассмотрим следующий пример.

Требуется проанализировать стойкость экосистемы, заданной орграфом на рис. 3.

Строим матрицу смежности этого орграфа:

$$m_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Задаём некоторое произвольное начальное ($k = 0$) состояние $\vec{v}(0)$ и иницилируем одну из вершин $\vec{p}(0)$, например, первую:

$$\vec{v}_i(0) = [2 \ 2 \ 2]$$

$$\vec{p}_i(0) = [1 \ 0 \ 0]$$

По формуле (1) строим последовательность значений компонентов вектора прироста \vec{p} .

$$k = 1: \quad p_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$p_2 = -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -1$$

$$p_3 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$$

$$k = 2: \quad p_1 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$p_2 = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -1$$

$$p_3 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = -1 \quad \text{и т. д.}$$

результат сводим в таблицу:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
p_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
p_2	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	...
p_3	0	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	...

Видно, что каждая колонка на четвертом шаге вычислений повторяется, т. е. процесс является периодическим.

Строим последовательность значений компонентов вектора состояния экосистемы:

$$k = 1: \quad v_1 = 2 + 1 = 3$$

$$v_2 = 2 + 0 = 2$$

$$v_3 = 2 + 0 = 2$$

$$k = 2: \quad v_1 = 3 + 0 = 3$$

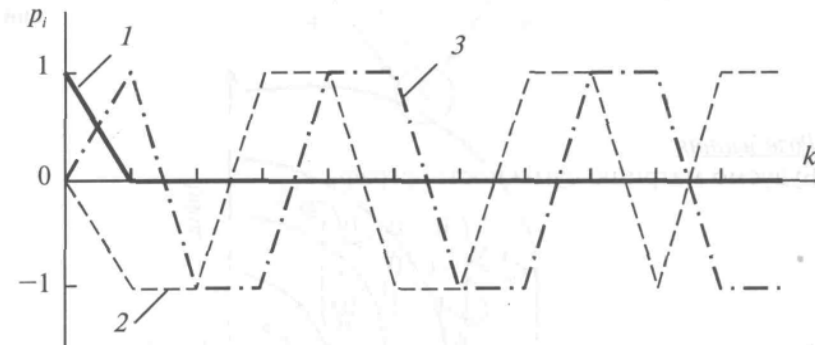
$$v_2 = 2 - 1 = 1$$

$$v_3 = 2 + 1 = 3 \quad \text{и т. д.}$$

результат сводим в таблицу:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
v_1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	...
v_2	2	2	1	0	1	2	1	0	1	2	...
v_3	2	2	3	2	1	2	3	2	1	2	...

Строим графики изменения во времени состояния и компонентов экосистемы:



Модели глобального развития человечества и природы

Потребность в прогнозировании мирового развития стала особенно актуальной в последней трети XX столетия. В 70-х годах особенно обострились общемировые проблемы (энергетическая, сырьевая, продовольственная, экологическая и ряд других), затрагивающие интересы всех стран и народов. Понятно, что в их решении заинтересованы все государства независимо от этнических, культурных особенностей и общественного строя.

В современном мире, отягощенном всеми "прелестями" технократических приоритетов, давно назрела необходимость налаживать и развивать международное, экономическое и иные формы сотрудничества для решения общих проблем. А таких немало: открытие и использование новых источников энергии и сырья, обеспечение продовольствием растущего населения планеты, загрязнение среды и поиски "чистых технологий" и т.п.

Эти проблемы привели к созданию в конце 60-х международной общественной организации – "Римский Клуб", которая объединила около семидесяти предпринимателей, управляющих, политических деятелей, высокопоставленных служащих, доверенных экспертов, деятелей культуры, ученых из стран Западной Европы, Северной и Южной Америки, Японии (философы, экологи, демографы и т.д.). Целью этой ассоциации является изучение мирового развития и его проектирования в XXI веке.

Свою деятельность Клуб начал в 1968 году со встречи в Академии Деи Линчеи в Риме – отсюда и название клуба. Президент Клуба – вице-президент компании "Оливетти", член административного совета компании "Фиат" Аурелио Печчеи. У Клуба нет штата и формального бюджета. Координирует его деятельность исполнительный комитет в составе 8 человек.

Изначально, финансирующие деятельность Клуба итальянская фирма "Фиат" и западногерманский концерн "Фольксваген", были заинтересованы в систематическом анализе перспектив энергетической и сырьевой проблем, с которыми связаны возможности расширения рынков сбыта автомобилей. Но ученые – кибернетики, экономисты, социологи и др., привлеченные для разработки этих прогнозов, в своих

отчетах охватывали более широкий круг вопросов, связанный с глобальными проблемами.

Вот основные цели, которые поставили перед собой деятели "Римского Клуба":

- дать обществу методику, с помощью которой можно было бы научно анализировать "затруднения человечества", связанные с физической ограниченностью ресурсов Земли, бурным ростом производства и потребления – этими "принципиальными пределами роста";
- донести до человечества тревогу представителей Клуба относительно критической ситуации, которая сложилась в мире по ряду аспектов;
- "подсказать" обществу, какие меры оно должно предпринять, чтобы "разумно вести дела" и достичь "глобального равновесия".

По заказу Клуба было создано более десятка моделей глобального развития человечества и природы, наиболее известные рассмотрим далее.

Модели Форрестера-Медоуза ("Мировая динамика", "Пределы роста")

В начале 70-х годов по предложению Клуба Дж. Форрестер (США) применил разработанную им методику моделирования на ЭВМ к "мировой проблематике". Результаты исследования были опубликованы в книге "Мировая динамика" (1971). В его модели «МИР-1» был сделан вывод: дальнейшее развитие человечества на физически ограниченной планете Земля приведет к экологической катастрофе в 20-х годах XXI столетия.

После обсуждения "модели Форрестера" исполнительный комитет поручил ученикам Форрестера продолжить исследование. Следующие модели «МИР-2» и «МИР-3» были значительно усовершенствованы. По уточненным данным начало "экологического коллапса", "вселенского мора" было отсрочено на 40 лет. Эта работа, выполненная в Массачусетском технологическом институте (США) под руководством Д.Медоуза, нашла отражение в книге "Пределы роста" (1972).

В этих моделях расчёт проводился на основе учёта взаимосвязей и тенденций развития 5-ти главных элементов:

1. народонаселения;
2. капитала;
3. природных ресурсов;
4. загрязнения окружающей среды;
5. производства продовольствия

В модели Медоуза закладывается геометрически прогрессирующий, т.е. экспоненциальный рост населения. Так, в 1970 г. население мира составляло 3,6 млрд. человек, и при росте 2,1% в год оно должно удвоиться за 33 года, что, собственно, сегодня мы и наблюдаем (население мира превышает 5 млрд. человек).

Модель ресурсов мира – это модель "уменьшающегося пирога". В модель входят около 1500-1800 уравнений.

В моделях преследовалась цель спрогнозировать развитие основных тенденций в глобальной социозкосистеме на ближайшие 100 лет исходя из неизменности характера социально-экономического развития.

Быстрый рост населения приведет к нехватке ресурсов (как пищевых, так и сырьевых). При современных темпах роста индустрии, невозобновляемые природные ресурсы истощатся через 50-100 лет. Дается анализ запасов черных и цветных металлов, нефти, угля, сроки истощения этих запасов и делаются соответствующие выводы. Общий вывод был следующим: вследствие противоречия между ограниченностью ресурсов и возрастающих темпов производства с одной стороны, и ростом населения наряду с темпами использования ресурсов с другой стороны, в середине XXI века есть большая вероятность возникновения глобального кризиса:

- ✓ катастрофическое загрязнение окружающей среды;
- ✓ резкое увеличение смертности населения;
- ✓ израсходование природных ресурсов;
- ✓ упадок производства.

Для выхода из данного положения авторами предложена идея «нулевого прироста» – не должно быть роста ни экономики, ни населения, т.е.:

- остановить увеличение численности населения (затормозить прирост населения земли и установить его численность к концу XX века на уровне 4,5 млрд. человек);

- ограничить производство, до простого воспроизводства;
- основной капитал направить в сферу услуг и сельское хозяйство;
- сократить потребление природных ресурсов в 8 раз.

Главная ценность моделей «МИР» состоит в ощутимом ударе по необоснованному оптимизму по поводу будущего развития человечества. Работа Массачусетского технологического института выявила первостепенной важности меры, необходимые для предотвращения грозящей человечеству катастрофы: это была констатация "материальных границ мира". И дальнейшие исследования должны были иметь практическую направленность и ответить на вопрос, "как жить и сосуществовать в пределах этих границ".

Их недостатками является – ограниченные и утопические представления о возможностях целенаправленного управления миром, а также отсутствие учёта неравномерности развития геополитических регионов.

Модель Месаровича- Пестеля ("Стратегия выживания")

В ответ на критику моделей «МИР» в 1974 г. по инициативе опять-таки Римского клуба было создано несколько новых моделей, из которых наиболее полной является модель созданная под руководством американского кибернетика проф. М.Месаровича и директора института теоретической механики в ФРГ Э.Пестеля. Над созданием модели "Месаровича-Пестеля" работала большая группа исследователей в течение двух лет. Как и подготовку первого отчета, этот проект финансировала фирма "Фольксваген".

Цель этой модели – экономический прогноз на 1975-2025г.г. Название проекта - "Стратегия выживания" (опубликована на английском языке под названием "Человечество у поворотного пункта" и на французском – "Стратегия на завтра").

Преимственность выражалась в том, что новый проект базировался по существу на тех же предположениях о невозможности дальнейшего роста человечества в целом.

В прошлом, как утверждают авторы, всемирное сообщество было простой совокупностью независимых частей. В новых условиях всемирное сообщество стало

превращаться во всемирную систему, т.е. в собрание функционально взаимосвязанных частей. В каждой такой системе рост одной какой-либо части зависит от роста или отсутствия роста других частей. Отсюда – нежелательный рост одной части угрожает не только этой части, но и другим частям.

Структура модели учитывала большее число факторов. Модель всемирного мирового хозяйства по Месаровичу и Пестелю состоит из 10 географических взаимодействующих регионов. Выделяются Северная Америка, Западная Европа, Япония, другие развитые капиталистические и развивающиеся страны. Здесь взаимодействие учитывало экспорт/импорт и эмиграцию/иммиграцию. Модель состоит из следующих подмоделей:

- ✓ экономика;
- ✓ энергетик;
- ✓ население.

Кроме того, вся система включает разные уровни иерархии. Каждый уровень, состоящий из того или иного государства (или блока) находится в соподчиненности от других уровней. Выделяются среды или сферы обитания человека (климатические условия, воды, земля, экологические процессы); техно-сфера (химические и физические процессы); демографическая, экономическая, общественная сферы; индивидуальная (психологический и биологический мир человека). Включение этих сфер на разных уровнях в иерархическую систему должно позволить, по мнению авторов, прогнозировать их состояние.

Исходя из полученных результатов, авторы сделали следующий вывод:

- миру угрожает не столько глобальная, сколько серия региональных катастроф, которые начнутся гораздо раньше, по сравнению с прогнозами Форестера и Медоуза (т.е. задолго до 2050 г.)
- миру угрожает углубление разрыва между уровнем жизни в отдельных регионах.

Таким образом, авторами проекта была предложена идея "органического дифференцированного роста", т.е гармоничного развития мира с изменением структуры экономики стран.

“Модель Барилоче”

Одновременно с моделью Месаровича-Пестеля была разработана модель проф. Еррери (Аргентина) – “Модель Барилоче” (1974). В ней мир был разделен на Азию, Африку, Латинскую Америку и развитые страны. Модель учитывала некоторые социальные факторы и предусматривала возможность управления развитием регионов через централизованное распределение капитала.

На основе результатов модельных расчётов был сделан следующий вывод: кризис, прогнозируемый предыдущими моделями уже наступил.

Японский проект - “Новый взгляд на развитие”

Одновременно (в 1974) вышел японский проект проф. Я. Кайа и Ю. Судзуки – “Новый взгляд на развитие”. В этой модели мир также разделяется на 9 регионов и предусматривается возможность управления развитием мировой экономики.

В этой модели преследовалась цель – поиск возможности уменьшения диспропорции уровня доходов на душу населения между регионами.

По результатам модельных прогнозов были сделаны выводы:

- развитые индустриальные страны должны предоставлять безвозмездную помощь менее развитым странам в размере не менее 1% своего валового национального продукта;
- помощь будет эффективной только при одновременном изменении структуры экономики регионов. А именно:

в развитых странах – это увеличение доли сельского хозяйства и уменьшение валового продукта легкой промышленности при неизменности тяжелой промышленности;

в малоразвитых – это уменьшение сельского хозяйства и увеличение доли легкой промышленности.

Модель Габора - “За пределами века расточительства”

В 1976 г. появилась модель Габора (Италия) - “За пределами века расточительства”. Её целью являлось решение проблем энергетических, сырьевых и продовольственных ресурсов планеты.

Главный вывод Габора состоял в том, что развитие глобальной социоэкологической системы идёт по пути увеличения неэффективного использования природных ресурсов. Поэтому необходимо перейти к рациональному управлению использованием ресурсов, отказавшись от расточительства, изменить стиль жизни, пересмотреть социально-политические приоритеты.

- Необходимо установить курс на ограничение потребления энергии в развитых странах (в малоразвитых это пока не надо).
- Альтернативным источником энергии является – атомная энергия.
- Необходимо снизить темпы роста населения, увеличить производство продовольствия и уменьшить его потребление в развитых странах (которые “переедают”).

Модель В. Леонтьева "Будущее мировой экономики"

Группой экспертов ООН под руководством известного экономиста В.Леонтьева была построена экономико-математическая модель будущего мировой экономики и создано восемь условных сценариев развития мира с 1990 по 2000 год. Проект под названием "Будущее мировой экономики" был опубликован в США в 1976 году.

В проекте "Будущее мировой экономики" Леонтьев подчеркивает, что "рост населения – не экспоненциальный процесс и не экспоненциальный взрыв". Он утверждает, что в развитых регионах мира темпы прироста будут падать уже в оставшиеся четверть века и что стабильный уровень численности будет достигнут после 2025 года. Сегодня мы можем подтвердить примерами эти выкладки (снижение прироста в странах Европы, России, Украины). В странах Третьего мира стабилизация произойдет к 2075 году в результате не голода, а демографических изменений, связанных с относительно высоким уровнем экономики.

Учет многовариантности развития нелинейной системы (в данном случае – мировой экономической системы) позволяет считать этот проект более совершенным, нежели предшествующие. К тому же, авторы заранее оговариваются, что темпы роста заданы были в качестве гипотезы и не могут рассматриваться как прогноз будущих тенденций. Кроме того, ряд факторов, влияющих на мировую динамику, не поддается контролю, что весьма важно и "анти-утопично".

Одно из главных составляющих проекта – это развитие регионов Третьего мира. Группа Леонтьева подсчитала, что разрыв между уровнями развития государств развивающихся и стран – промышленных центров мира будет сохраняться и составит 1:12 (невозможность устранения разрыва в доходах).

Рассмотрение и анализ всех вариантов выравнивания темпов роста достаточно громоздки. Укажем лишь, что математическая сторона модели Леонтьева уникальна: она состоит из 2625 уравнений и отражает детали развития 15 регионов мира – 8 развитых и 7 развивающихся. Сама модель построена на основе метода "затраты – выпуск", а регионы взаимодействуют по принципу "экспорт"–"импорт" по 4-м секторам экономики, широко применяемого для составления межотраслевого баланса.

Главными факторами роста мировой экономики, по мнению группы Леонтьева, являются:

- производство продовольствия и сельскохозяйственной продукции;
- наличие достоверных и потенциальных минеральных ресурсов;
- издержки, необходимые для ослабления загрязнения экосистем;
- зарубежные инвестиции и индустриализация развивающихся стран, изменения в международной торговле и платежных балансах;
- переход к новому международному экономическому порядку.

"Главными пределами экономического роста являются условия развития - политического, социального и институционального характера, но не физического" - отмечают авторы проекта в надежде на перемены социального характера, которые не замедлили произойти за последние 20 лет. В целом, вывод проекта имеет принципиальное значение, поскольку не ограничивается лишь количественным анализом и расчетом запасов и ресурсов.

В проекте также анализируются запасы ресурсов, указывается, в частности, что добыча оставшихся минеральных ископаемых станет более дорогостоящей.

Опираясь на полученные модельные прогнозы авторы предлагают:

- глубокие социальные, политические, структурные изменения в развивающихся странах;

- существенные изменения мирового экономического порядка: стабилизация товарных рынков, привлечения экспорта промышленной продукции из развивающихся стран.
- экологическую ситуацию можно сдвинуть в "плюс" при увеличении финансовых вложений в соответствующие проекты и технологии.

Таким образом, все глобальные модели приводят к общему выводу: человечество развиваться в таком направлении, как сейчас, не может; необходима коренная перестройка структуры экономики и управления.