Гороховский А.Н.

Тема: «Матричные вычисления в экологических задачах прогнозирования»

Цель работы - познакомиться с процедурами выполнения основных матричных операций, которые используются в математических моделях и методиках прогнозирования состояния окружающей среды.

Лабораторная работа № 2.1

Основные матричные операции. Матричные методы анализа и прогнозирования воздействия на окружающую среду

Основными матричными операциями, используемыми в методиках прогнозирования воздействия на окружающую среду (ОС), являются умножение матрицы на число, сложение и перемножение матриц.

По определению, чтобы **умножить матрицу на число**, нужно умножить на это число все элементы матрицы.

Суммой двух матриц одинаковой размерности называется матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых.

Операция **умножения матрицы на матрицу** определяется более сложным образом. Пусть заданы две матрицы A и B, причем число столбцов первой равно числу строк второй. Если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix},$$

то **произведение матриц** A и B называется матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}\,, \quad i = 1,\dots,m\,; \quad j = 1,\dots,k$$

Произведение матриц A и B обозначается C = AB и зависит от порядка сомножителей. Если AB = BA, то матрицы A и B называются **перестановочными**.

В множестве квадратных матриц определена единичная матрица - квадратная матрица, все диагональные элементы которой - единицы, а остальные - нули:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица чаще всего обозначается буквой E или E_n, где n - порядок матрицы. Непосредственным вычислением можно проверить основное свойство единичной матрицы $AE = EA = A$.

Скалярной матрицей называется диагональная матрица с одинаковыми числами на главной диагонали. Единичная матрица - частный случай скалярной матрицы.

Из приведенных ниже вычислений в Mathcad видно, что умножением на матрицы специального вида можно переставить в матрице столбцы или строки, вычислить сумму элементов любых строк или столбца, получить матрицу, равную какой-либо строке или столбцу матрицы, реализовать операцию умножения матрицы на число.

В процедуре анализа воздействия на ОС, предложенной Петерсоном рассматриваются две матрицы A и B. В матрице A определено возможное воздействие элементов проекта (например, количество заводов без очистки и с биологической очисткой сточных вод, сельскохозяйственные угодья, энергетические установки и т.д.) на параметры окружающей среды (качество поверхностных вод, воздуха, почв, биотические сообщества и т.д.). Воздействие оценивают в баллах в интервале от –3 до +3.

В матрице B в тех же величинах оценивается вторичное воздействие, которое могут оказать измененные под влиянием проекта компоненты природной среды на социальные факторы (плотность населения, здоровье, производство продуктов, уровень занятости населения и т.д.).

Произведение этих матриц определяет воздействие элементов проекта на социальные факторы. Умножив полученную матрицу на вектор весов значимости социальных факторов, получают результирующий вектор-столбец. Просуммировав значения, которого получают единую агрегированную оценку воздействия проекта.

Фрагмент рабочего документа примера выполнения вычислений п. 1 и п. 2 задания этой лабораторной работы в Mathcad:

$$D := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Суммирование элементов по столбцам:

$Crow := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$Crow \cdot D = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$

Выделение одного столбца:

$C3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad D \cdot C3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$

Суммирование элементов по строкам:

$Ccol := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad D \cdot Ccol = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{bmatrix}$

Выделение одной строки:

$C1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C1 \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$C2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C2 \cdot D = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Умножение на число, умножение на скалярную матрицу:

$2 \cdot D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix} \qquad E2 := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad E2 \cdot D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$

Перестановка двух строк:

$C12 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C12 \cdot D = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad C23 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C23 \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Перестановка двух столбцов:

$D \cdot C12 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix} \qquad D \cdot C23 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

Матрицы Петерсона (A1, A2 и B) воздействия элементов проектов 1 и 2 на социальные факторы; вектор весов значимости социальных факторов G.

- в матрице A: первичные (физические) воздействия на ОС - столбцы, причинные факторы - строки;
- в матрице B: первичные (физические) воздействия на ОС - строки, воздействия на человека (социум) - столбцы.

$A1 := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A2 := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad G := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Расчет агрегированных оценок воздействия проектов 1 и 2 на ОС.

$AB1 := A1 \cdot B \qquad AO1 := AB1 \cdot G \qquad \sum AO1 = -57$

$AB2 := A2 \cdot B \qquad AO2 := AB2 \cdot G \qquad \sum AO2 = -11$

Лабораторная работа № 2.2

Транспонирование. Вычисление обратной матрицы. Ортогональные матрицы.

Для прямоугольных матриц определена операция транспонирования. Рассмотрим произвольную прямоугольную матрицу A. Матрица, получающаяся из матрицы A заменой строк столбцами, называется транспонированной по отношению к матрице A и обозначается A^T:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица A называется обратимой, если существует квадратная матрица X, удовлетворяющая соотношениям $AX=XA=E$. Матрица X называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1}, т.е. $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Квадратная матрица A, для которой $A^T=A$, называется симметричной. Элементы такой матрицы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны.

Квадратная матрица U, для которой $U^{-1}=U^T$, называется ортогональной матрицей. Модуль определителя ортогональной матрицы равен единице; сумма квадратов элементов любого столбца ортогональной матрицы на соответствующие элементы другого столбца равны нулю. Такими же свойствами обладают строки ортогональной матрицы.

Определителем квадратной матрицы A, называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} (-1)^{j+1} M_1^{<j>} ,$$

где $M_1^{<j>}$ - определитель квадратной матрицы порядка $n-1$, полученной из матрицы A вычеркиванием первой строки и j-го столбца.

Например, для матрицы второго порядка

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Фрагмент рабочего документа примера выполнения вычислений п.3 задания этой лабораторной работы в Mathcad:

$$V := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad E := \mathrm{identity}(4) \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Вычисление матрицы H $\qquad H := E - \dfrac{2}{(|V|)^2} \cdot V \cdot V^T$

$$H = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & -0.667 & -0.667 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.667 & 0 & 0.333 & -0.667 \\ -0.667 & 0 & -0.667 & 0.333 \end{bmatrix} \qquad H^T = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & -0.667 & -0.667 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.667 & 0 & 0.333 & -0.667 \\ -0.667 & 0 & -0.667 & 0.333 \end{bmatrix}$$

Доказательство ортогональности матрицы H

$$H \cdot H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H^T \cdot H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Вычисление обратной матрицы

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & -0.667 & -0.667 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.667 & 0 & 0.333 & -0.667 \\ -0.667 & 0 & -0.667 & 0.333 \end{bmatrix} \qquad H^{-1} - H^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Проверка свойств ортогональной матрицы
ORIGIN:=1

$$H^{<1>} \cdot H^{<1>} = 1 \qquad H^{<1>} \cdot H^{<2>} = 0 \qquad H^{<2>} \cdot H^{<3>} = 0$$

$$H^{<2>} \cdot H^{<2>} = 1 \qquad H^{<1>} \cdot H^{<3>} = 0 \qquad H^{<2>} \cdot H^{<4>} = 0$$

$$H^{<3>} \cdot H^{<3>} = 1 \qquad H^{<1>} \cdot H^{<4>} = 0 \qquad H^{<3>} \cdot H^{<4>} = 0$$

$$H^{<4>} \cdot H^{<4>} = 1 \qquad |H| = -1$$

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

При решении задач моделирования и прогнозирования состояния окружающей среды необходимость вычислять определитель возникает достаточно часто. Наиболее распространенные приложения определителя - исследование моделей, которые включают линейные системы уравнений.

Для системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + ... + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases},$$

матрица коэффициентов системы A, вектор правых частей b и вектор неизвестных X будут иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Рассмотренную схему линейных алгебраических уравнений можно записать в матричной форме в виде $A \cdot X = b$.

Справедливо следующее утверждение. Если определитель $\Delta = \det A$ матрицы отличен от нуля, т.е. матрица невырождена, то система имеет единственное решение $x_1, x_2, \dots, x_n$, определяемое формулами Крамера $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ_i – определитель матрицы, полученный из матрицы A заменой i–го столбца вектором b.

Далее будет приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий пример решения линейной системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 30 \\ -x_1 + 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases},$$

методом Крамера, обратной матрицы и с помощью стандартной функции Mathcad *lsolve*.

У к а з а н и е. ORIGIN:=1 означает, что столбцы и строки матрицы будут нумероваться с единицы (1). Для вычисления Δ_i проще всего скопировать матрицу A в буфер обмена, затем вставить в помеченной позиции матрицу из буфера обмена и затем заменить элементы соответствующего столбца элементами столбца правых частей. Другой универсальный способ – это использовать стандартные матричные функции augment() и submatrix().

Если матрица системы невырождена, то у нее существует обратная матрица и тогда решение системы легко получить, умножив обе части уравнения $A \cdot X = b$ на матрицу A^{-1}: $A^{-1} \cdot A \cdot X = b \cdot A^{-1}$, поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то $X = b \cdot A^{-1}$.

Далее будет приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий пример решения линейной системы методом обратной матрицы и с помощью стандартной функции Mathcad *lsolve*. Исходное задание матрицы приведено в примере выше.

Гороховский А.Н.

Лабораторная работа № 2.3

Модель взаимодействия экологических и экономических систем

Модели этого типа являются наиболее распространенными и применяются при решении проблем взаимодействия природы и общества. Их построение основано на использовании методов линейной алгебры и систем, описываемых дифференциальными уравнениями. В качестве примера, рассмотрим многоуровневую модель, описывающую взаимодействие экологических и экономических систем.

В общем виде такая модель должна включать следующие блоки:

1. межотраслевого баланса;
2. динамики природных ресурсов;
3. принятия управленческих решений.

Главной целью (решением) этой модели является устранение проблемных ситуаций, связанных с принятием решений, эффективных с точки зрения сегодняшнего дня, но не эффективных для будущего. Модели этого типа обладают достаточной сложностью и включают как СЛАУ, так и системы уравнений в интегральной и дифференциальной форме.

В рамках данной лабораторной работы, в качестве примера, рассмотрим структуру и методы анализа одного из блоков многоуровневой модели - блока межотраслевого баланса (МОБ). Блок МОБ представлен многоотраслевой моделью Леонтьева в виде СЛАУ. Межотраслевой баланс в экономике, как известно, — это метод анализа взаимосвязей между различными секторами экономической системы.

Предположим, что исследуемую эколого-экономическую систему можно разделить на несколько отраслей (секторов), производящих определенные товары и услуги (сельское хозяйство, промышленность, транспорт, энергетика и т.п.). При производстве товаров и услуг в каждом секторе расходуются ресурсы в виде сырья, рабочей силы, оборудования и др., которые производятся как в данном секторе экономики, так и в других секторах. Это означает, что каждый сектор выступает в системе межотраслевых связей одновременно производителем и потребителем.

Кроме полезного продукта по каждому сектору экономики происходит образование и выброс загрязняющих веществ в окружающую среду, количество которых можно представить через удельные величины, например, приходящиеся на 1-цу выпуска каждого вида продукции.

Цель балансового анализа — определить сколько продукции должен произвести каждый сектор для того, чтобы удовлетворить все потребности экономической системы в его продукции и, при этом, не нарушить установленных норм выбросов вредных веществ в окружающую среду.

Рассмотрим упрощенную модель межотраслевого баланса — баланс экономики, состоящей из трех секторов — сельского хозяйства, промышленности и домашних хозяйств. В качестве единицы измерения объемов товаров и услуг каждого сектора выберем их стоимость.

Предположим, что вся продукция сельского хозяйства составляет 200 денежных единиц, из них 50 единиц потребляется внутри самого сектора, 40 единиц — в промышленности и 110 — в домашних хозяйствах.

Продукция промышленности составляет 250 единиц, из них 70 единиц потребляются в сельскохозяйственном производстве, 30 — в секторе промышленности и 150 — в домашних хозяйствах.

Домашние хозяйства производят 300 единиц продукции, из них 80 единиц потребляются в сельском хозяйстве, 180 — в промышленности и 40 — внутри самого сектора. Эти данные сведены в таблицу межотраслевого баланса.

Таблица межотраслевого баланса для простейшей эколого-экономической модели региона

	Сельское хозяйство	Промышленность	Домашние хозяйства	Общий выпуск
Сельское хозяйство	50	40	110	200
Промышленность	70	30	150	250
Домашние хозяйства	80	180	40	300
Затраты	200	250	300	

Числа, расположенные в строках таблицы, показывают, как распределяется произведенная продукция каждого сектора, последний элемент строки — объем произведенной сектором продукции (общий выпуск). Данные, расположенные в столбцах показывают, какую продукцию потребляет каждый сектор в процессе производства, последнее число в столбце — суммарные затраты сектора. Из таблицы видно, что все секторы являются производящими, при этом вся произведенная продукция потребляется в различной степени этими же производящими секторами. Такая модель межотраслевых связей называется ***замкнутой***. В замкнутой модели объем затрат каждого сектора (сумма элементов в столбце таблицы) равен объему произведенной продукции (сумма элементов в соответствующей строке).

Таблицы межотраслевого баланса описывают потоки товаров и услуг между секторами экономики в течение фиксированного промежутка времени, например в течение квартала, полугодия или года. Такие данные, сохраняемые в таблицах, естественно описывать и анализировать в терминах матричной алгебры.

Для рассмотренного примера замкнутой экономической системе баланс между совокупным выпуском и затратами каждого сектора можно описать равенствами:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n\ ,$$

где b_{kj} (b_{ik}) – количество товаров и услуг k-го (i-го) сектора экономики, потребляемого в j-м (k-м) секторе.

Матрица $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ называется ***матрицей межотраслевого баланса*** (или ***матрицей Леонтъева***).

На практике экономика области или региона представляет собой ***открытую*** систему межотраслевых связей, в которой вся произведенная продукция (совокупный продукт) разделяется на две части: одна часть продукции (промежуточный продукт) идет на потребление в производящих секторах, а другая ее часть (конечный продукт) потребляется вне сферы материального производства — в секторе конечного спроса. При этом потребление в секторе конечного спроса может меняться. Для открытой системы межотраслевой баланс будет иметь вид:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} + y_i \qquad \text{или} \qquad x_i = \sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} \cdot x_j\right) + y_i \qquad \text{или} \qquad x_i - \sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} \cdot x_j\right) = y_i$$

для $i = 1, 2, \ldots n$

или в виде СЛАУ:

$$\left(E - A\right) = Y$$

или в развернутом виде:

$$\begin{cases} \left(1 - a_{11}\right) \cdot x_1 - a_{12} \cdot x_2 \ldots - a_{1n} \cdot x_n = y_1 \\ - a_{21} \cdot x_1 + \left(1 - a_{22}\right) \cdot x_2 \ldots - a_{2n} \cdot x_n = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ - a_{n1} \cdot x_1 - a_{n2} \cdot x_2 \ldots + \left(1 - a_{nn}\right) \cdot x_n = y_n \end{cases} \tag{2.1}$$

где X=x_i - объем выпуска i-го сектора (объем товаров и услуг, произведенных в одном из n производящих секторов), $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$;

Y=y_i — конечный продукт i-го сектора (объем продукции i-го сектора, потребляемой в секторе конечного спроса);

$A=a_{ij}=b_{ij}/x_j$ — количество продукции i-го сектора, которое расходуется при производстве единицы продукции j-го сектора (***коэффициенты прямых затрат***).

b_{ij} — объем товаров и услуг i-го сектора, потребляемых в j-м секторе;

Приведенное равенство описывает технологию производства и структуру экономических связей и означает, что в сектор конечного спроса от каждого производственного сектора поступает та часть произведенной продукции, которая остается после того, как обеспечены потребности производящих секторов.

Предположим, что в течение некоторого промежутка времени коэффициенты прямых затрат a_{ij} остаются постоянными, а конечный спрос изменяется. Это означает, что существует линейная связь между выпуском и затратами и изменение выпуска хотя бы в одном секторе экономики влечет за собой пропорциональное изменение затрат всех производящих секторов. Коэффициентами пропорциональности этой связи являются элементы структурной матрицы. То есть в линейной модели "затраты — выпуск" соотношения баланса описывают связь неизвестного выпуска с заданным спросом. Эти соотношения позволяют определить, каким должен быть совокупный выпуск в каждом секторе, чтобы удовлетворить изменившиеся потребности общества.

В экономической системе с заданной структурной матрицей A спрос всегда удовлетворяется, если для любого вектора спроса Y существует вектор выпуска $X=Y(E—A)^{-1}$, все компоненты которого неотрицательны. Доказано, что для этого необходимо выполнение условий Хаукинса—Саймона:

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 1-a_{nn} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1,n-1} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \dots & 1-a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} > 0, \dots \quad \begin{vmatrix} 1-a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$1-a_{11} > 0,$$

т.е. если сумма элементов столбцов структурной матрицы A не превышает единицы $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1, \quad j=1,2,\dots,n$ и хотя бы одна из этих сумм строго меньше единицы (существует такое k в пределах $1 \le k \le n$, что $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} < 1,$), то элементы d_{ij} матрицы $(E—A)^{-1}$ неотрицательны $d_{ij} \ge 0$.

Далее если обозначить общий объем загрязняющего вещества через Z, то для расчета загрязнения окружающей среды каждым сектором и всеми одновременно необходимо дополнить систему уравнений (2.1) еще одним балансовым уравнением:

$$Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n,$$

где c_i – нормы выбросов вредного вещества на единицу продукции x_i каждого сектора.

Пример выполнения задания к лабораторной работе 2.3

Межотраслевой баланс открытой трехсекторной экономики

	Сельское хозяйство	Промышленность	Транспорт	Домашние хозяйства	Общий выпуск
Сельское хозяйство	50	16	120	60	246
Промышленность	30	10	180	100	320
Транспорт	15	14	140	80	249

Рассматривается модель экономики, в которой выделены четыре сектора: три производящих сектора (промышленность, сельское хозяйство, транспорт) и домашние хозяйства в качестве сектора конечного спроса. Известны данные по выбросам загрязняющего вещества на единицу продукции каждого сектора $C = \{0.04;\ 0.26;\ 0.34\}$. Структура экономики описана в таблице межотраслевого баланса (объемы указаны в единицах стоимости).

Требуется определить вектор выпуска и суммарное количество выбросов вредного вещества для заданного вектора конечного спроса $Y=\{100;\ 150;\ 120\}$. Как должен измениться выпуск каждого сектора и выбросы вредного вещества, если спрос на транспортные услуги увеличится на 5%?

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями и комментариями для выполнения этой лабораторной работы приведен ниже.

У к а з а н и е. Определите матрицу межотраслевого баланса B – например, нажав <Ctrl+M> или с помощью кнопки панели инструментов. Вычислите вектор выпуска X - суммы элементов строк матрицы B, умножив матрицу B справа на вектор-столбец с единичными элементами. Для того чтобы найти структурную матрицу, разделите элементы каждого столбца матрицы B на соответствующий (имеющий тот же номер) элемент вектора выпуска X. Это можно сделать так: определите вектор Xinv, элементы которого - числа, обратные элементам вектора выпуска, и умножьте матрицу B справа на диагональную матрицу с диагональю Xinv. Определите вектор-столбец конечного спроса *Y.* Затем воспользуйтесь функцией identity(3) для определения матрицы AE = *E*—*A*. Для проверки условия Хаукинса — Саймона вычислите главные миноры матрицы AE. Для этого щелкните по кнопке в панели и введите в помеченной позиции имя или определение матрицы (в приведенном документе функция submatrix(AE, 1, i, l, i) определяет главный минор i-го порядка матрицы AE). Определите матрицу AEinv, обратную к матрице AE, и вычислите вектор выпуска *X,* умножив матрицу AEinv справа на вектор конечного спроса *Y.* Вычислите, сколько единиц составляют *5%* транспортных услуг, указанных в исходной матрице *B,* умножив третий элемент вектора выпуска *X* на 0.05 и найдите соответствующее увеличение выпуска и вредного вещества, умножив на полученное число третий столбец матрицы AEinv.

Контрольные вопросы

1. Назовите основные операции с матрицами, которые используются в методиках прогнозирования воздействия на окружающую среду.
2. Что такое перестановочная, скалярная, единичная, транспонированная, обратная, симметричная и невырожденная матрица.
3. На основании каких величин выполняют анализ воздействия деятельности человека на окружающую среду и оценивают последствия этой деятельности для социума в методике Петерсона.
4. Опишите методы, с помощью которых можно находить решения СЛАУ в Mathcad. Для чего в одном из этих методов находят определитель матрицы.
5. Из каких блоков состоит многоуровневая модель взаимодействия экологических и экономических систем.
6. Сформулируйте цель, которую преследуют при выполнении анализа блока межотраслевого баланса многоуровневой модели.
7. Какая модель межотраслевых связей называется замкнутой, а какая открытой. Что означают коэффициенты прямых затрат в матрице Леонтьева.
8. Сформулируйте условия Хаукинса-Саймона. Что они определяют.
9. Найдите и покажите в созданном документе Mathcad балансовое уравнение, которое описывает выбросы загрязняющего вещества. Что означают переменные в этом уравнении.

ЗАДАНИЕ

1. Лабораторная работа № 2.1. Умножая на матрицы специального вида, сформируйте матрицу-столбец и матрицу-строку, соответственно равные j-му столбцу и i-й строке матрицы A с заданными в условии номерами. Вычислите суммы элементов j-го столбца и i-й строки матрицы A.
   - для нечетных вариантов: переставьте 1-ю и 2-ю строки и 1-й и 2-й столбцы матрицы;
   - для четных вариантов: переставьте 2-ю и 3-ю строки и 1-й и 3-й столбцы матрицы.

2. С помощью матриц Петерсона ($A1$, $A2$ и B), которые описывают воздействия элементов двух проектов на социальные факторы, и вектора весов значимости социальных факторов G выполните расчет агрегированных оценок. На основании полученных агрегированных оценок сделайте выбор наилучшего проекта.

3. Лабораторная работа № 2.2. Доказать, что матрица $H = E - 2 \cdot \dfrac{v \cdot v^T}{|v|^2}$ (v - вектор столбец) является ортогональной матрицей. Проверить для нее свойства ортогональной матрицы. В качестве v взять первый столбец матрицы A из п.1.

4. Исследуйте и, если решение существует, найдите по формулам Крамера, методом обратной матрицы и с помощью стандартной функции *lsolve* решение системы линейных алгебраических уравнений. Если решения не существует измените вектор правых частей (B) так, чтобы для него можно было найти решение вышеприведенными методами.

5. Лабораторная работа № 2.3. Исследуйте заданную таблицей межотраслевого баланса модель эколого-экономической системы (в таблицах: A и I – сельское хозяйство, B и II – промышленность, C и III – транспорт, IV – сектор конечного спроса (домашние хозяйства) V – общий выпуск, Z - выбросы загрязняющего вещества на единицу продукции каждого сектора, Y – заданный (новый) конечный спрос на продукцию). Найдите объем выпуска каждой отрасли по заданному конечному спросу (Y). Найдите зависимость выпуска каждой отрасли от конечного спроса. Укажите, как должен измениться выпуск каждого сектора и выбросы вредного вещества при указанном ($k\%$) увеличении спроса на продукцию одного из производящих секторов. Для номеров вариантов *№*:

   № = 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 - на продукцию А (сельское хозяйство);
   № = 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 - на продукцию В (промышленность);
   № = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 - на продукцию С (транспорт);

   $k\%$ формируется для вариантов:

   № = 1-10: $k\% = №;$

   № = 11-21: $k\% = \dfrac{№}{2} - 5$.

Рекомендуемый порядок выполнения заданий

1. Установить режим автоматического выполнения вычислений и режим отображения результатов вычислений по горизонтали.

   По п.1-2 задания.
2. Определите и введите матрицу A.
3. Введите матрицу, умножение на которую выделяет столбец и строку матрицы с указанным номером. Выполните умножение.
4. Введите матрицу, умножение на которую суммирует элементы указанных столбца и строки. Выполните умножение.
5. Введите матрицу, умножение на которую переставляет указанные столбцы и строки. Выполните умножение.

   По п.3 задания.
6. Введите матрицу-столбец V и единичную матрицу E соответствующей размерности.
7. Вычислить матрицу H.
8. Вычислить произведение $H^T H$ и HH^T.
9. Вычислить H^{-1}. Сравнить H^{-1} и H^T.
10. Показать, что векторы-столбцы матрицы H имеют единичную длину и попарно ортогональны. Убедиться, что модуль определителя матрицы H равен 1.

    По п.4 задания.
11. Введите матрицу системы и столбец правых частей.
12. Вычислить определитель матрицы системы. Система имеет единственное решение, если определитель отличен от нуля.
13. Вычислить определители матриц, полученных заменой соответствующего столбца столбцом правых частей.
14. Найти решение системы по формулам Крамера.
15. Вычислить решение системы по формуле $X = b \cdot A^{-1}$.
16. Проверить правильность решения умножением матрицы системы на вектор-столбец решения.
17. Найти решение системы с помощью функции *lsolve* и сравнить результаты вычислений.

    По п.5 задания.
18. Составьте и введите матрицу межотраслевого баланса.
19. Вычислите объем выпуска и платежи в сектор конечного спроса для каждой отрасли.
20. Составьте структурную матрицу экономики A.
21. Проверьте справедливость условия Хаукинса — Саймона.
22. Найдите матрицу $(E—A)^{-1}$.
23. Вычислите объем выпуска для каждого сектора экономики по заданному конечному спросу.
24. Вычислите увеличение выпуска продукции при заданном изменении начального спроса на продукцию указанного сектора.
25. Сохраните результаты вычислений в файле.

Варианты к заданиям лабораторной работы № 2

(подгруппа - А)

Лабораторная работа № 2.1. `Задание 1.`

№ 1. i=1, j=1,

A	0,45	0,64	1,74	-0,44
	2,49	-0,14	1,07	0,96
	1,99	0,91	1,44	0,43
	1,61	1,69	-3,89	1,29

№ 2. i=1, j=2,

A	0,70	0,00	1,79	-0,92
	2,07	0,25	1,31	0,33
	1,38	-0,16	1,06	0,49
	0,73	0,26	-2,51	1,71

№ 3. i=1, j=3,

A	1,92	1,48	1,76	0,75
	3,42	0,64	0,86	-0,64
	1,29	0,53	0,37	0,43
	1,03	0,82	-3,34	1,32

№ 4. i=1, j=4,

A	0,99	0,91	0,82	0,38
	3,23	-1,06	1,89	0,20
	1,28	1,09	1,38	0,55
	1,49	1,23	-2,51	1,33

№ 5. i=2, j=1,

A	1,52	0,42	1,09	-0,93
	2,74	-0,24	1,60	0,70
	1,58	-0,41	-0,14	0,92
	1,75	0,34	-2,40	1,45

№ 6. i=2, j=2,

A	1,31	0,59	1,80	0,95
	3,04	-0,60	0,52	1,21
	1,13	0,45	-0,49	-0,28
	0,39	0,56	-2,84	1,32

№ 7. i=2, j=3,

A	1,32	0,12	1,10	-0,42
	2,84	-1,15	1,73	-0,35
	1,61	-0,29	0,77	-0,69
	1,67	1,65	-2,26	0,47

№ 8. i=2, j=4,

A	0,69	-0,35	1,37	0,72
	3,47	-0,57	0,78	0,45
	0,93	-0,24	0,13	-0,46
	0,74	0,90	-3,64	0,69

№ 9. i=3, j=1,

A	0,11	0,09	0,78	-0,77
	2,70	0,46	1,21	-0,01
	2,43	-0,08	-0,20	0,93
	0,76	0,53	-3,16	0,83

№ 10. i=3, j=2,

A	1,69	-0,11	0,70	0,98
	3,62	0,52	1,00	0,17
	1,72	1,14	0,88	-0,73
	0,46	1,72	-3,95	1,73

№ 11. i=3, j=3,

A	0,69	1,33	0,85	-0,02
	2,58	0,28	0,53	0,12
	1,23	-0,48	0,75	-0,17
	1,52	0,29	-2,49	0,33

№ 12. i=1, j=1,

A	1,63	1,35	1,54	1,00
	2,18	-0,11	0,46	0,30
	1,30	0,54	1,00	-0,18
	1,71	1,63	-2,40	1,11

№ 13. i=1, j=2,

A	0,24	-0,44	2,27	0,87
	2,93	0,23	1,13	1,12
	1,29	0,71	1,25	-0,14
	0,58	1,56	-3,50	0,82

№ 14. i=1, j=3,

A	0,46	0,30	1,17	-0,53
	3,54	0,61	1,36	0,86
	1,85	0,65	1,45	-0,15
	1,39	0,80	-2,53	0,07

№ 15. i=1, j=4,

A	0,38	0,96	2,11	0,62
	3,25	0,25	0,90	-0,37
	1,48	0,05	-0,33	-0,53
	0,32	1,78	-3,73	1,14

№ 16. i=2, j=1,

A	1,32	0,08	1,91	-0,46
	3,52	0,57	1,70	0,77
	1,41	1,11	1,24	-0,28
	1,24	0,68	-3,20	1,19

№ 17. i=2, j=2,

A	1,68	0,10	1,85	0,34
	2,71	0,49	0,28	1,07
	1,27	0,33	1,42	0,51
	2,11	0,11	-2,61	1,44

№ 18. i=2, j=3,

A	0,77	1,10	1,75	-0,21
	3,64	-0,01	1,24	-0,08
	0,74	0,40	0,87	-0,52
	1,46	0,18	-3,75	0,61

№ 19. i=2, j=4,

A	1,50	0,83	0,81	-0,59
	3,22	-0,48	1,70	-0,58
	1,67	1,04	0,24	0,81
	1,05	0,98	-2,27	1,17

№ 20. i=3, j=1,

A	1,89	0,23	1,76	0,12
	3,95	-0,60	0,65	-0,64
	2,28	1,16	0,10	0,94
	1,01	0,36	-2,40	0,21

№ 21. i=3, j=4,

A	0,85	1,29	2,17	-0,39
	2,12	0,39	0,70	-0,63
	0,52	0,00	1,26	-0,78
	2,16	1,51	-3,74	1,50

Лабораторная работа № 2.1. Задание 2.

Вариант №1

A2=

-1	1	-2
2	0	-1
3	3	0
-2	0	-2
-3	1	-2

A1=

2	2	-1
0	2	0
1	3	2
-2	2	0
0	-2	1

B=

-1	-2	-2	-1
-1	-2	0	0
2	3	3	3

G=

3	7	9	4

Вариант №2

A2=

0	1	-3
2	-2	2
-1	-2	-2
2	3	1
-1	-1	0

A1=

-1	1	2
-2	3	3
1	-2	2
-2	0	-1
1	-1	2

B=

-3	3	-2	-1
0	-1	-2	2
-1	-2	-3	-1

G=

8	5	10	10

Вариант №3

A2=

2	-1	0
-1	-2	-3
0	-1	1
-2	0	0
0	1	-1

A1=

-2	0	-3
1	0	-1
-2	1	2
3	2	3
-1	-2	1

B=

2	-2	-1	-2
2	1	3	0
-3	-3	1	-3

G=

6	2	4	1

Вариант №4

A2=

0	-2	-1
-3	0	1
-1	0	-1
2	-2	-1
1	-2	0

A1=

3	3	-1
-1	-1	2
-1	3	-2
2	-3	-1
-2	0	2

B=

2	1	0	1
0	-1	-3	1
-2	1	-3	-2

G=

1	3	8	3

Вариант №5

A2=

2	-1	-2
3	-2	2
-1	0	3
-3	0	-1
-3	1	3

A1=

0	2	2
-3	3	-1
-1	-2	-1
2	-1	3
-3	3	-1

B=

2	0	1	3
0	0	-1	0
-1	3	-1	-3

G=

9	1	9	1

Вариант №6

A2=

-3	3	-1
2	0	3
-3	-1	2
-1	0	-2
-1	-2	-3

A1=

0	1	2
0	2	3
1	1	-1
0	-2	1
2	-2	2

B=

3	-2	0	-1
-2	-2	0	-1
0	1	2	-3

G=

6	3	7	9

Вариант №7

A2=

1	1	-1
2	2	3
0	-3	-2
2	1	0
-3	2	2

A1=

2	1	1
1	-3	-1
2	-2	-1
-1	0	-1
2	-2	-1

B=

0	-2	-2	0
3	1	-2	3
-2	-3	2	0

G=

8	1	3	4

Вариант №8

A2=

-2	-3	2
1	2	-2
0	0	-1
2	0	0
2	2	2

A1=

2	2	-3
-2	1	1
3	2	2
-1	-2	1
1	-2	0

B=

1	-3	-1	1
1	3	-1	-2
2	-1	2	0

G=

4	5	10	2

Вариант №9

A2=

1	-3	1
-1	0	0
-1	1	-3
3	-2	2
0	0	-2

A1=

-1	0	-3
-1	3	3
1	0	0
-2	-1	0
1	-2	3

B=

1	-2	-3	3
2	0	-1	2
0	-2	-1	-2

G=

2	7	9	6

Вариант №10

A2=

-1	2	0
-1	-1	2
0	-3	2
1	-3	-1
1	-2	-1

A1=

2	-3	1
2	3	0
2	1	-2
-1	-1	1
1	0	3

B=

-2	1	-2	2
-2	3	2	-1
1	0	-1	0

G=

2	2	3	5

Вариант №11

A2=

-1	3	2
1	-1	2
2	-2	-1
-2	0	-3
1	-2	-3

A1=

-2	1	0
2	-3	0
-2	0	1
0	-2	-2
1	2	0

B=

-1	2	-2	-1
0	0	-1	-2
1	-3	1	0

G=

4	8	4	6

Вариант №12

A2=

-2	1	-2
1	1	-3
2	3	3
-1	-1	-1
0	2	2

A1=

-3	0	1
0	2	2
-2	2	1
-2	1	2
2	-1	2

B=

3	0	3	0
-3	1	-1	-1
-2	-2	1	3

G=

1	5	10	8

Вариант №13

A2=

-3	-3	3
2	3	0
-1	1	-3
0	1	1
1	-3	3

A1=

2	-2	-3
-2	-1	0
1	3	1
-1	-2	1
-3	0	0

B=

0	2	-2	-1
-1	0	3	-2
-2	0	-2	2

G=

7	10	3	8

Вариант №14

A2=

3	-2	1
0	-3	1
0	2	1
-2	-2	2
0	1	0

A1=

2	1	-2
-1	-3	3
1	1	2
3	-2	3
0	2	2

B=

-1	-2	0	-3
1	-1	-1	2
-2	1	-3	-2

G=

5	2	6	7

Вариант №15

A2=

2	-2	-1
0	-2	2
2	2	1
-2	1	-2
0	0	-3

A1=

-2	-2	1
3	-2	0
-2	-1	3
-1	0	3
2	2	0

B=

1	1	0	3
-2	2	2	2
2	-2	2	1

G=

3	1	6	5

Вариант №16

A2=

2	-3	2
1	-2	0
-1	-3	1
-1	0	3
2	-2	-1

A1=

1	0	1
-1	3	3
-1	-1	1
3	-2	2
0	2	3

B=

2	3	-2	1
2	2	-1	3
0	2	-1	0

G=

8	9	2	5

Вариант №17

A2=

0	-2	1
1	-3	0
2	-3	-3
0	1	-2
0	-1	1

A1=

2	0	2
-1	-2	-3
0	1	-1
-2	2	-3
-1	1	-1

B=

2	0	1	-1
0	2	2	-1
-1	1	1	-2

G=

2	7	8	9

Вариант №18

A2=

-3	-1	-1
1	2	0
2	0	0
1	2	-1
-2	3	2

A1=

3	-2	-2
0	-1	-2
2	2	-3
1	-1	3
-2	-1	0

B=

-1	0	-1	-3
-1	-1	0	-2
1	2	-2	-3

G=

5	6	3	6

Вариант №19

A2=

-1	1	1
2	3	3
2	-3	2
0	-1	0
-2	2	3

A1=

1	-2	0
2	-2	-3
-2	0	-3
3	-1	1
-2	0	2

B=

0	3	-2	1
0	1	-1	-1
1	-1	1	1

G=

8	4	9	7

Вариант №20

A2=

2	2	-2
1	0	-2
-3	3	0
2	3	2
2	-2	1

A1=

-2	2	0
2	0	1
-3	-2	-2
-3	-1	0
0	-1	1

B=

0	-1	2	0
-1	-2	0	-2
-1	1	-3	0

G=

4	2	6	9

Вариант №21

A2=

1	3	0
2	-2	-1
1	3	3
1	-3	-1
2	0	-3

A1=

-1	-3	-2
-2	0	0
-3	0	-3
-3	2	-2
-1	1	-1

B=

2	-1	1	1
1	2	-3	2
2	3	-1	-2

G=

6	9	1	6

Лабораторная работа № 2.2. Задание 4.

Вариант №1

A	0,47	0,09	0,60	0,34	B	0,54
	0,07	0,17	-0,27	0,05		-0,03
	0,01	-0,37	-0,23	0,04		-0,39
	-0,08	0,53	0,27	-0,26		0,36

Вариант №2

A	0,61	0,61	0,30	0,44	B	0,26
	-0,26	-0,20	0,42	0,08		0,08
	-0,21	0,40	0,41	0,47		-0,01
	0,05	0,23	0,31	0,20		0,54

Вариант №3

A	0,65	0,35	0,37	0,51	B	0,44
	0,26	0,00	0,10	0,48		0,55
	0,01	0,28	0,92	0,53		0,27
	0,30	0,29	0,00	0,09		0,63

Вариант №4

A	0,36	0,60	0,40	-0,23	B	0,24
	0,51	0,47	0,70	0,81		0,07
	0,30	0,24	0,40	0,53		0,46
	-0,09	0,03	0,68	0,60		0,30

Вариант №5

A	0,22	-0,32	-0,04	0,20	B	0,32
	-0,24	0,25	0,49	0,07		0,62
	0,60	-0,30	0,09	0,22		0,30
	-0,10	0,76	0,13	0,87		0,54

Вариант №6

A	0,27	0,25	0,42	0,49	B	0,18
	-0,01	0,02	0,45	0,23		0,30
	0,31	0,16	0,47	0,10		0,84
	0,76	-0,24	0,46	0,08		0,87

Вариант №7

A	-0,01	0,42	0,64	-0,39	B	0,19
	0,88	0,09	0,80	0,22		0,14
	0,59	0,21	0,37	-0,02		0,33
	0,61	0,42	0,79	0,22		0,68

Вариант №8

A	0,46	0,00	-0,13	0,40	B	0,30
	0,11	0,11	0,11	0,66		0,27
	0,78	0,58	0,15	0,14		-0,30
	0,51	0,48	0,10	0,34		-0,14

Вариант №9

A	0,54	0,11	0,25	0,06	B	0,53
	0,80	0,03	-0,33	-0,19		0,05
	0,66	0,30	0,21	-0,36		-0,19
	0,35	0,29	-0,20	0,64		-0,01

Вариант №10

A	0,27	-0,13	0,29	0,59	B	0,58
	0,16	-0,07	0,37	-0,19		0,94
	0,20	0,49	-0,29	0,77		0,61
	0,01	0,39	0,42	0,48		0,68

Вариант №11

A	0,25	0,47	0,97	0,33	B	0,93
	0,33	-0,10	0,27	0,53		-0,07
	0,86	0,36	0,68	-0,06		0,47
	-0,13	0,11	0,61	0,39		-0,31

Вариант №12

A	-0,03	0,57	0,78	0,13	B	0,05
	0,35	0,65	-0,04	0,02		0,18
	0,07	-0,12	0,46	0,30		0,17
	0,25	0,18	0,57	0,58		0,39

Вариант №13

A	0,91	0,18	0,52	0,61	B	0,42
	0,33	-0,07	0,04	0,35		0,60
	0,78	0,13	-0,19	0,05		0,68
	0,23	0,22	0,00	-0,42		0,79

Вариант №14

A	0,64	0,13	0,22	0,05	B	0,44
	-0,33	0,81	0,39	0,50		-0,36
	0,42	0,07	0,40	0,69		0,23
	0,13	-0,06	0,06	0,24		0,52

Вариант №15

A	0,80	0,46	-0,38	0,06	B	0,05
	0,06	0,74	0,87	0,73		0,19
	0,77	0,75	0,66	0,59		-0,19
	0,01	0,14	0,60	-0,01		0,17

Вариант №16

A	0,24	0,76	0,47	0,47	B	0,24
	0,54	-0,13	0,71	0,05		0,64
	0,37	0,36	0,25	0,83		0,65
	0,14	-0,22	0,20	-0,08		0,51

Вариант №17

A	0,03	0,35	0,15	-0,13	B	0,12
	0,26	0,27	0,49	0,61		0,60
	-0,11	-0,14	0,45	0,47		0,19
	0,13	0,36	0,18	0,79		0,14

Вариант №20

A	0,29	0,06	0,22	0,03	B	0,49
	-0,12	0,49	0,37	0,20		0,64
	0,27	-0,03	0,26	0,08		0,75
	-0,07	0,58	0,53	-0,13		0,56

Вариант №18

A	0,12	0,45	-0,27	-0,02	B	0,78
	0,30	-0,31	0,52	0,19		0,24
	0,69	0,18	0,82	0,04		0,00
	0,34	0,24	0,69	0,44		0,04

Вариант №21

A	0,70	0,54	0,55	0,13	B	0,33
	0,47	0,41	0,10	0,17		0,47
	0,16	0,01	-0,18	0,56		-0,18
	0,10	0,31	0,16	0,01		0,87

Вариант №19

A	0,52	0,31	-0,14	-0,14	B	0,10
	0,21	0,14	0,62	0,61		0,16
	0,40	0,04	0,26	0,82		0,74
	0,60	0,29	0,37	0,75		0,43

Вариант №22

A	0,36	0,50	0,45	0,47	B	-0,25
	0,10	0,12	-0,08	-0,05		0,50
	-0,17	-0,25	0,23	0,66		0,03
	0,31	-0,02	0,12	0,11		-0,22

Лабораторная работа № 2.3. Задание 5.

Вариант №1

	I	II	III	IV	V
A	10	16	50	20	96
B	3	15	40	23	81
C	2	26	30	32	90

	100		0,36
Y=	100	**Z=**	0,50
	110		0,05

Вариант №2

	I	II	III	IV	V
A	20	22	100	30	172
B	6	20	80	26	132
C	5	32	60	35	132

	200		0,51
Y=	150	**Z=**	0,50
	110		0,07

Вариант №3

	I	II	III	IV	V
A	30	28	150	40	248
B	10	25	120	30	185
C	7	38	90	37	172

	300		0,13
Y=	250	**Z=**	0,17
	190		0,41

Вариант №4

	I	II	III	IV	V
A	40	34	200	50	324
B	13	30	160	33	236
C	10	44	120	40	214

	400		0,36
Y=	250	**Z=**	0,15
	250		0,03

Вариант №5

	I	II	III	IV	V
A	50	40	250	60	400
B	16	35	200	36	287
C	12	50	150	42	254

	410		0,44
Y=	300	**Z=**	0,24
	300		0,29

Вариант №6

	I	II	III	IV	V
A	60	46	300	70	476
B	20	40	240	40	340
C	15	56	180	45	296

Y=

500
400
350

Z=

0,46
0,08
0,30

Вариант №7

	I	II	III	IV	V
A	70	52	350	80	552
B	23	45	280	43	391
C	17	62	210	47	336

Y=

600
450
400

Z=

0,24
0,22
0,43

Вариант №8

	I	II	III	IV	V
A	80	58	400	90	628
B	26	50	320	46	442
C	20	68	240	50	378

Y=

650
450
400

Z=

0,27
0,05
0,08

Вариант №9

	I	II	III	IV	V
A	90	64	450	100	704
B	30	55	360	50	495
C	22	74	270	52	418

Y=

710
500
420

Z=

0,21
0,08
0,38

Вариант №10

	I	II	III	IV	V
A	100	70	500	110	780
B	33	60	400	53	546
C	25	80	300	55	460

Y=

800
600
500

Z=

0,23
0,10
0,34

Вариант №11

	I	II	III	IV	V
A	60	46	300	70	476
B	20	40	240	40	340
C	15	56	180	45	296

Y=

500
400
300

Z=

0,42
0,17
0,09

Вариант №12

	I	II	III	IV	V
A	70	52	350	80	552
B	23	45	280	43	391
C	17	62	210	47	336

Y=

600
400
350

Z=

0,38
0,51
0,19

Вариант №13

	I	II	III	IV	V
A	80	58	400	90	628
B	26	50	320	46	442
C	20	68	240	50	378

Y=

660
400
350

Z=

0,03
0,05
0,18

Вариант №14

	I	II	III	IV	V
A	90	64	450	100	704
B	30	55	360	50	495
C	22	74	270	52	418

	Y=			Z=	
		730			0,50
	Y=	600		**Z=**	0,03
		460			0,25

Вариант №15

	I	II	III	IV	V
A	100	70	500	11	780
B	33	60	400	53	546
C	25	80	300	55	460

	800		0,45
Y=	600	**Z=**	0,02
	500		0,42

Вариант №16

	I	II	III	IV	V
A	90	64	450	100	704
B	36	65	440	56	597
C	27	86	330	57	500

	720		0,34
Y=	610	**Z=**	0,16
	520		0,30

Вариант №17

	I	II	III	IV	V
A	120	82	600	130	932
B	40	70	48	60	650
C	30	92	360	60	542

	1000		0,34
Y=	700	**Z=**	0,16
	600		0,38

Вариант №18

	I	II	III	IV	V
A	130	88	650	140	1008
B	43	75	520	63	701
C	32	98	390	62	582

	1100		0,40
Y=	750	**Z=**	0,06
	620		0,41

Вариант №19

	I	II	III	IV	V
A	140	94	700	150	1084
B	46	80	560	66	752
C	35	104	420	65	624

	1200		0,12
Y=	800	**Z=**	0,14
	700		0,31

Вариант №20

	I	II	III	IV	V
A	150	100	750	160	1160
B	50	85	600	70	805
C	37	110	450	67	664

	1250		0,43
Y=	850	**Z=**	0,20
	700		0,36

Вариант №21

	I	II	III	IV	V
A	60	47	300	73	480
B	30	55	365	45	495
C	140	98	696	150	1084

	100		0,10
Y=	400	**Z=**	0,08
	600		0,47

Варианты к заданиям лабораторной работы № 2

(подгруппа - Б)

Лабораторная работа № 2.1. Задание 1.

№ 1. i=1, j=1,

A	1,27	0,80	1,84	-0,69
	2,53	-1,25	0,24	-0,29
	0,89	-0,31	1,17	-0,11
	1,07	0,04	-3,82	1,07

№ 2. i=1, j=2,

A	0,55	1,48	1,49	0,81
	2,50	0,65	0,30	0,29
	1,93	1,04	1,20	0,11
	0,66	0,74	-2,92	1,95

№ 3. i=1, j=3,

A	0,08	0,90	1,21	0,14
	2,49	-0,58	1,78	0,14
	2,28	-0,33	0,85	-0,76
	1,62	1,62	-2,71	0,44

№ 4. i=1, j=4,

A	0,08	0,03	0,68	-0,84
	2,11	-1,21	0,73	-0,63
	1,55	0,53	0,73	-0,78
	0,38	0,30	-3,53	1,49

№ 5. i=2, j=1,

A	1,05	0,05	0,87	0,99
	2,78	-0,84	1,24	1,04
	2,01	-0,30	0,78	0,21
	0,42	1,60	-3,24	0,10

№ 6. i=2, j=2,

A	1,66	1,49	2,31	0,02
	3,94	0,56	0,19	0,43
	1,56	0,79	-0,39	0,00
	1,18	1,05	-3,43	0,58

№ 7. i=2, j=3,

A	0,67	0,08	1,19	0,41
	2,06	-0,28	1,41	-0,49
	1,81	0,18	-0,46	-0,50
	0,82	1,91	-3,33	0,72

№ 8. i=2, j=4,

A	0,12	0,89	0,91	-0,92
	3,19	0,31	0,22	-0,09
	0,87	0,66	1,09	0,94
	0,21	1,94	-3,09	0,63

№ 9. i=3, j=1,

A	0,23	0,74	1,20	0,03
	3,02	0,38	0,46	1,17
	2,42	0,02	0,34	-0,49
	0,58	0,55	-2,10	1,49

№ 10. i=3, j=2,

A	0,08	1,23	2,40	-0,09
	2,30	0,52	0,62	-0,17
	1,46	0,71	1,15	0,11
	1,95	0,01	-3,46	1,83

№ 11. i=3, j=3,

A	1,61	0,20	0,99	-0,64
	3,58	0,49	0,71	0,18
	1,14	0,08	-0,41	0,95
	1,17	1,33	-4,00	0,58

№ 12. i=1, j=1,

A	1,94	0,80	2,21	-0,17
	3,97	0,18	0,30	0,34
	1,53	-0,24	0,03	0,57
	0,44	0,87	-3,51	0,72

№ 13. i=1, j=2,

A	1,64	1,01	2,49	-0,12
	2,12	0,33	1,04	1,12
	1,14	-0,41	0,19	0,76
	1,01	1,40	-3,78	0,46

№ 14. i=1, j=3,

A	0,40	0,55	2,14	0,58
	3,29	0,31	0,66	-0,62
	2,34	0,78	-0,40	-0,60
	0,66	0,78	-3,06	0,04

№ 15. i=1, j=4,

A	1,93	1,26	1,21	-0,03
	3,85	0,26	1,52	-0,33
	1,83	0,99	0,96	-0,70
	1,13	1,96	-3,44	1,96

№ 16. i=2, j=1,

A	0,46	0,89	1,92	0,00
	3,49	0,59	1,92	-0,60
	1,85	0,77	0,34	-0,18
	1,57	1,75	-3,25	1,14

№ 17. i=2, j=2,

A	0,23	0,74	1,99	0,19
	2,81	-0,11	1,04	-0,48
	1,53	0,46	0,82	-0,73
	1,88	1,54	-2,78	0,38

№ 18. i=2, j=3,

A	1,85	0,42	0,60	-0,95
	2,93	-1,25	0,19	0,64
	1,97	0,16	0,69	-0,20
	0,29	1,88	-2,69	0,54

№ 19. i=2, j=4,

A	1,45	0,48	2,32	-0,88
	3,84	-0,17	0,36	0,05
	2,00	1,32	-0,22	0,24
	1,04	0,38	-3,01	1,74

№ 20. i=3, j=1,

A	0,14	1,16	2,21	0,62
	3,57	-0,30	1,35	-0,27
	2,17	-0,54	0,80	0,83
	0,35	1,18	-3,50	1,91

№ 21. i=3, j=4,

A	1,34	0,16	1,28	0,02
	2,69	-0,81	1,05	0,18
	1,62	-0,42	1,49	0,71
	1,00	1,83	-3,96	1,25

Лабораторная работа № 2.1. Задание 2.

Вариант №1

A2=

-1	-2	1
-2	-2	-2
1	0	0
-3	-1	0
0	-1	0

A1=

1	-1	-2
-3	-2	-1
0	2	-1
-2	1	0
0	1	1

B=

2	-1	1	0
-2	-1	0	0
1	-2	2	-1

G=

9	3	5	1

Вариант №2

A2=

-3	2	-2
2	-3	1
2	0	-2
2	-2	-2
3	2	1

A1=

0	2	3
-1	-1	-1
3	1	-1
2	-2	-3
-2	-1	-1

B=

-1	3	-1	-1
0	1	0	-2
0	-1	-1	2

G=

8	7	3	6

Вариант №3

A2=

1	3	-1
-1	2	-3
1	2	1
-1	3	1
-2	-1	-1

A1=

2	0	-3
0	2	0
1	-1	0
1	0	2
2	2	-3

B=

1	-1	0	3
0	-1	-1	1
1	-2	-1	2

G=

8	7	2	10

Вариант №4

A2=

1	0	1
3	-3	-3
-2	3	0
-1	-3	0
3	-3	2

A1=

-1	1	2
2	0	-1
1	2	0
2	2	3
-3	-2	-1

B=

0	-2	2	0
-2	3	2	3
0	3	0	0

G=

10	2	4	3

Вариант №5

A2=

-2	1	1
-2	-2	0
0	1	-2
1	2	0
-1	-2	1

A1=

-1	-2	0
0	2	0
-1	-2	2
1	0	1
-3	1	-1

B=

3	2	0	3
-2	1	2	1
3	0	-2	-1

G=

8	6	4	6

Вариант №6

A2=

-1	0	2
-2	-1	-3
0	2	2
1	1	-1
-1	2	-1

A1=

-1	-1	-1
-2	-3	1
1	0	-2
-2	1	2
-2	-3	3

B=

-2	-2	-1	3
3	-1	1	1
1	-3	1	-3

G=

10	8	9	7

Вариант №7

A2=

1	2	2
-2	1	2
0	-1	3
0	3	2
-3	3	-2

A1=

-3	2	2
-1	-2	2
-3	0	2
1	-1	0
3	3	2

B=

-3	1	-1	3
2	-3	-2	-3
2	1	0	3

G=

5	2	1	4

Вариант №8

A2=

-3	1	-3
0	2	3
-1	-3	-3
2	2	-1
3	3	-2

A1=

2	-2	-1
-1	3	-1
0	-2	-2
3	1	3
2	-2	2

B=

2	0	1	0
2	0	2	3
3	2	-1	-3

G=

1	3	7	2

Вариант №9

A2=

1	2	2
0	1	3
2	-2	0
0	1	0
0	0	0

A1=

2	-1	0
0	1	1
2	-2	-1
-2	2	-2
1	-2	-1

B=

0	0	-2	-1
3	0	2	2
2	2	-3	2

G=

9	7	5	6

Вариант №10

A2=

-1	-3	2
2	-2	-1
-1	1	-2
2	0	1
2	3	0

A1=

1	-3	-1
1	1	-1
-2	3	-1
0	-1	3
2	3	-1

B=

-2	1	2	2
1	2	1	1
2	-2	2	-1

G=

5	10	9	2

Вариант №11

A2=

2	3	1
2	-2	-1
1	1	0
1	0	0
2	3	-3

A1=

2	-2	0
1	3	0
-3	3	0
-3	-2	-1
-1	3	-1

B=

-3	2	1	-1
2	-3	1	1
2	-3	1	-2

G=

2	8	4	7

Вариант №12

A2=

1	2	-3
2	-1	1
0	2	1
0	0	2
1	2	-1

A1=

2	2	-1
-2	2	0
2	0	-3
-2	2	0
-1	1	0

B=

-2	1	3	-2
2	0	-2	-3
-2	2	1	0

G=

1	8	2	3

Вариант №13

A2=

2	2	3
-1	1	0
0	0	-1
2	1	2
1	-2	-1

A1=

-2	0	1
-3	2	-2
3	-2	2
1	2	-1
1	2	1

B=

2	2	-2	1
-2	-1	2	-2
-2	3	-2	3

G=

8	5	4	2

Вариант №14

A2=

2	-1	2
-2	-2	-2
3	3	3
-2	1	-2
-3	1	2

A1=

1	0	3
-2	0	2
-3	-1	-2
0	2	-2
0	2	1

B=

-1	0	-1	-2
1	0	3	2
1	2	-1	0

G=

2	8	9	1

Вариант №15

A2=

0	-1	1
-2	3	1
1	-1	0
-2	3	-2
-2	2	0

A1=

-1	2	2
-3	1	-2
-1	1	0
1	0	0
0	2	2

B=

-2	-1	-3	-2
0	2	-3	2
-1	-2	2	0

G=

4	5	3	9

Вариант №16

A2=

-2	-1	-2
-1	2	0
-1	0	0
-2	-1	3
1	0	-1

A1=

-2	2	2
2	-1	1
-1	3	0
-2	3	2
0	-1	3

B=

1	0	-1	1
2	1	0	1
-1	2	1	1

G=

4	6	8	7

Вариант №17

A2=

-2	0	0
-3	2	1
3	-1	1
-2	3	-2
0	-1	1

A1=

3	0	3
2	0	1
-1	-2	-2
-1	0	3
1	1	-1

B=

3	1	3	-1
2	1	3	-1
0	-1	-1	-2

G=

8	2	7	5

Вариант №18

A2=

3	2	1
3	-2	-2
-2	-2	1
1	-1	-3
-1	3	0

A1=

1	1	0
-2	2	1
1	0	1
2	0	3
-3	-2	3

B=

2	-2	-3	1
0	3	-3	0
-1	3	1	-1

G=

6	2	10	3

Вариант №19

A2=

-2	-3	-3
0	-2	1
-1	-1	1
2	2	0
-2	-3	1

A1=

0	1	1
1	0	2
2	0	1
2	-2	2
0	-2	1

B=

-2	-2	-3	3
0	0	-1	-2
0	1	1	2

G=

9	4	6	3

Вариант №20

A2=

2	0	2
0	1	2
1	1	3
-1	1	-1
-3	0	-1

A1=

1	-2	0
2	-3	-2
3	2	0
0	-1	2
2	1	-3

B=

0	-2	1	-2
-1	2	0	-1
-2	-1	-1	1

G=

5	2	6	3

Вариант №21

A2=

-2	-1	3
1	1	-1
2	2	-1
-2	2	0
-3	-2	1

A1=

3	1	0
0	2	-3
3	0	0
0	1	2
2	-2	-2

B=

-3	3	-3	-2
-3	2	0	3
-2	3	-3	2

G=

1	4	2	10

Лабораторная работа № 2.2. Задание 4.

Вариант №1

A	0,41	0,48	-0,28	0,41	B	0,36
	0,43	0,37	-0,49	0,40		-0,08
	0,22	0,63	0,70	0,72		0,76
	0,20	0,03	0,24	0,23		0,40

Вариант №2

A	0,64	-0,23	-0,12	0,51	B	0,49
	-0,07	0,36	-0,06	0,01		0,50
	0,38	0,29	-0,34	0,56		0,48
	0,77	0,39	-0,04	0,79		-0,17

Вариант №3

A	0,27	0,69	0,10	0,90	B	-0,46
	-0,22	-0,09	0,22	0,14		-0,03
	0,31	0,14	0,50	0,38		0,50
	0,48	-0,23	0,29	0,14		0,52

Вариант №4

A	0,31	0,22	-0,46	0,61	B	0,02
	0,28	0,43	0,17	0,54		0,35
	-0,23	0,14	0,40	0,58		0,37
	-0,29	0,60	0,16	0,46		-0,26

Вариант №5

A	0,59	0,13	0,48	0,84	B	0,63
	0,16	0,20	0,82	0,39		0,38
	-0,18	0,24	0,49	0,34		-0,17
	0,08	0,79	-0,09	0,14		0,27

Вариант №6

A	0,51	-0,02	0,05	-0,19	B	-0,01
	0,70	-0,36	0,78	0,08		0,47
	0,10	0,21	0,53	0,84		-0,19
	0,09	-0,04	0,57	-0,09		0,53

Вариант №7

A	0,05	0,26	0,66	0,09	B	0,14
	-0,34	0,13	0,34	-0,34		0,40
	0,66	0,59	0,49	0,03		0,61
	0,12	-0,01	-0,31	0,14		0,25

Вариант №8

A	-0,04	0,80	-0,01	0,65	B	0,80
	0,61	0,06	0,02	0,60		0,34
	0,56	0,51	-0,03	0,55		0,69
	0,56	0,11	0,37	-0,12		-0,01

Вариант №9

A	0,67	0,04	0,33	0,55	B	0,51
	0,39	-0,35	0,19	0,17		0,51
	0,02	0,80	0,51	-0,35		0,26
	0,08	0,56	0,19	0,03		0,61

Вариант №10

A	0,23	-0,14	0,50	0,32	B	0,83
	0,61	0,52	0,55	0,76		0,76
	0,81	0,14	0,55	-0,24		-0,16
	0,58	0,07	0,59	0,92		0,17

Вариант №11

A	0,40	0,03	0,20	-0,39	B	-0,20
	0,40	0,12	0,61	0,13		0,17
	0,35	0,44	0,45	0,83		0,76
	0,88	-0,20	0,33	0,51		0,03

Вариант №12

A	-0,23	-0,13	0,23	0,34	B	-0,10
	0,25	0,11	0,06	0,17		0,36
	0,20	0,47	0,55	0,35		0,16
	0,33	0,27	0,27	-0,14		0,88

Вариант №13

A	0,10	-0,28	0,62	0,36	B	-0,13
	0,23	0,46	0,40	-0,12		-0,06
	0,22	-0,38	0,31	0,24		0,28
	0,84	0,49	0,87	0,00		-0,22

Вариант №14

A	0,20	0,01	-0,12	0,57	B	0,00
	-0,03	0,78	0,43	0,19		0,29
	0,16	-0,17	0,50	0,32		-0,17
	0,79	-0,25	0,17	0,45		0,08

Вариант №15

A	0,24	0,08	0,04	0,20	B	-0,48
	0,69	-0,09	0,16	0,48		0,37
	0,24	0,17	0,60	0,01		0,45
	0,19	0,57	0,10	0,66		0,22

Вариант №16

A	0,55	-0,07	-0,13	0,32	B	0,04
	0,02	0,00	0,71	0,14		0,07
	0,36	0,75	0,16	0,02		-0,11
	0,36	0,13	0,01	0,92		0,22

Вариант №17

A	0,22	-0,08	0,24	0,76	B	0,15
	-0,02	0,33	0,50	0,81		0,88
	0,75	-0,20	0,42	0,15		0,39
	0,34	0,74	0,39	0,28		-0,23

Вариант №20

A	0,37	0,18	-0,39	0,44	B	-0,07
	-0,03	0,51	0,81	0,22		0,83
	0,38	0,27	0,74	-0,32		0,13
	-0,11	-0,39	0,48	0,47		0,39

Вариант №18

A	0,46	0,21	-0,09	0,36	B	0,30
	0,27	0,01	-0,32	0,32		0,75
	0,19	0,16	0,41	0,16		0,76
	0,58	0,38	0,25	-0,01		0,33

Вариант №21

A	0,52	0,43	0,50	0,29	B	0,46
	0,21	0,28	0,42	-0,25		-0,05
	0,65	0,35	0,43	0,04		0,22
	0,21	0,15	0,82	0,92		-0,14

Вариант №19

A	0,60	0,33	-0,09	-0,25	B	0,04
	0,28	0,54	0,48	0,12		0,22
	0,73	-0,20	-0,31	-0,19		0,00
	0,47	0,54	0,85	0,48		0,04

Вариант №22

A	0,41	0,85	0,45	-0,12	B	-0,19
	0,09	-0,02	0,14	0,32		0,43
	0,47	0,65	0,41	0,14		0,10
	-0,02	0,69	0,50	0,73		-0,10

Лабораторная работа № 2.3. `Задание 5.`

Вариант №1

	I	II	III	IV	V	Y=	Z=
A	111	82	436	216	845	60	0,25
B	216	262	457	438	1373	685	0,16
C	167	110	499	373	1149	1164	0,11

Вариант №2

	I	II	III	IV	V	Y=	Z=
A	190	489	161	3	843	746	0,22
B	498	496	236	466	1696	1504	0,19
C	420	254	119	130	923	157	0,06

Вариант №3

	I	II	III	IV	V	Y=	Z=
A	158	291	90	33	572	233	0,31
B	167	169	311	200	847	940	0,10
C	400	10	40	407	857	414	0,31

Вариант №4

	I	II	III	IV	V	Y=	Z=
A	13	65	140	191	409	284	0,05
B	350	404	30	30	814	558	0,36
C	145	313	159	255	872	279	0,42

Вариант №5

	I	II	III	IV	V	Y=	Z=
A	58	43	490	383	974	1104	0,27
B	355	422	256	342	1375	1023	0,07
C	355	485	197	370	1407	678	0,46

Вариант №6

	I	II	III	IV	V
A	409	335	182	171	1097
B	99	429	61	354	943
C	1	215	449	13	678

	Y=		Z=
	1302		0,26
Y=	565	**Z=**	0,45
	973		0,42

Вариант №7

	I	II	III	IV	V
A	257	251	390	296	1194
B	136	283	471	410	1300
C	340	382	254	414	1390

	712		0,34
Y=	1300	**Z=**	0,12
	1484		0,21

Вариант №8

	I	II	III	IV	V
A	317	297	81	29	724
B	411	336	73	324	1144
C	11	208	255	140	614

	747		0,10
Y=	986	**Z=**	0,03
	650		0,08

Вариант №9

	I	II	III	IV	V
A	251	68	3	35	357
B	138	239	145	32	554
C	267	125	264	466	1122

	344		0,11
Y=	50	**Z=**	0,21
	639		0,13

Вариант №10

	I	II	III	IV	V
A	35	359	137	128	659
B	108	378	13	221	720
C	333	456	89	448	1326

	405		0,35
Y=	816	**Z=**	0,26
	1404		0,41

Вариант №11

	I	II	III	IV	V
A	467	159	434	22	1082
B	135	130	238	469	972
C	52	207	77	72	408

	529		0,23
Y=	1001	**Z=**	0,16
	488		0,37

Вариант №12

	I	II	III	IV	V
A	308	290	62	262	922
B	445	214	340	266	1265
C	299	272	87	152	810

	267		0,38
Y=	401	**Z=**	0,51
	861		0,19

Вариант №13

	I	II	III	IV	V
A	130	326	242	25	723
B	417	149	281	159	1006
C	395	401	228	306	1330

	790		0,28
Y=	1043	**Z=**	0,32
	886		0,10

Вариант №14

	I	II	III	IV	V	Y=	Z=
A	493	370	122	169	1154	1245	0,06
B	230	160	46	170	606	702	0,35
C	98	17	485	311	911	922	0,18

Вариант №15

	I	II	III	IV	V	Y=	Z=
A	225	6	86	78	395	427	0,05
B	382	271	366	302	1321	806	0,14
C	82	236	112	471	901	73	0,47

Вариант №16

	I	II	III	IV	V	Y=	Z=
A	249	342	280	174	1045	225	0,38
B	57	241	136	112	546	440	0,17
C	458	460	372	241	1531	321	0,33

Вариант №17

	I	II	III	IV	V	Y=	Z=
A	105	239	107	240	691	556	0,17
B	4	265	413	476	1158	1226	0,07
C	245	255	499	366	1365	1388	0,43

Вариант №18

	I	II	III	IV	V	Y=	Z=
A	133	138	78	471	820	912	0,14
B	12	199	79	428	718	332	0,43
C	346	198	479	472	1495	747	0,28

Вариант №19

	I	II	III	IV	V	Y=	Z=
A	154	69	54	377	654	724	0,42
B	181	141	70	412	804	851	0,37
C	131	325	281	47	784	879	0,39

Вариант №20

	I	II	III	IV	V	Y=	Z=
A	48	312	153	312	825	904	0,28
B	271	468	107	287	1133	661	0,11
C	269	396	145	477	1287	1091	0,10

Вариант №21

	I	II	III	IV	V	Y=	Z=
A	430	217	167	409	1223	1246	0,34
B	27	450	330	39	846	903	0,04
C	29	468	334	5	836	847	0,07

Пример выполнения

Лабораторная работа № 2

Тема: *"Матричные вычисления в экологических задачах прогнозирования"*

2.1. "Основные матричные операции. Матричные методы анализа и прогнозирования воздействия на окружающую среду"

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Суммирование элементов по столбцам

$$Crow := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Crow \cdot D = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

Выделение одного столбца

$$C3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D \cdot C3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Суммирование элементов по строкам

$$Ccol := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D \cdot Ccol = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Выделение одной строки

$$C1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C1 \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C2 \cdot D = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Умножение на число, умножение на скалярную матрицу

$$2 \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix} \qquad E2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad E2 \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

Перестановка двух строк

$$C12 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C12 \cdot D = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad C23 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C23 \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Перестановка двух столбцов

$$D \cdot C12 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad D \cdot C23 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Матрицы Петерсона (А и В) воздействия елементов проектов 1 и 2 на социальные факторы. Вектор весов значимости социальных факторов G.
 - в матрице А - первичные (физические) воздействия на ОС - столбцы, причинные факторы - строки
 - в матрице В - первичные (физические) воздей2ствия на ОС - строки, воздействия на человека/социум - столбцы

1-й проект

2-й проект

$$A1 := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A2 := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad G := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Расчет агрегированных оценок воздействия проектов 1 и 2 на ОС

1-й проект: $AB1 := A1 \cdot B \qquad AO1 := AB1 \cdot G \qquad \sum AO1 = -57$

2-й проект: $AB2 := A2 \cdot B \qquad AO2 := AB2 \cdot G \qquad \sum AO2 = -11$

Вывод: 2-й проект развития (реконструкции) предпочтительнее

Пример выполнения

2.2. "Транспонирование. Вычисление обратной матрицы. Ортогональные матрицы"

$ORIGIN := 1$

Исходная матрица Единичная матрица

$$V := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E := \mathrm{identity}(4) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычисление матрицы H

$$H := E - \frac{2}{(|V|)^2} \cdot V \cdot V^T \qquad V^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0.333 & 0 & -0.667 & -0.667 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.667 & 0 & 0.333 & -0.667 \\ -0.667 & 0 & -0.667 & 0.333 \end{pmatrix} \qquad H^T = \begin{pmatrix} 0.333 & 0 & -0.667 & -0.667 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.667 & 0 & 0.333 & -0.667 \\ -0.667 & 0 & -0.667 & 0.333 \end{pmatrix}$$

Доказательства ортогональности матрицы H

$$H \cdot H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H^T \cdot H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычисление обратной матрицы

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 0.333 & 0 & -0.667 & -0.667 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.667 & 0 & 0.333 & -0.667 \\ -0.667 & 0 & -0.667 & 0.333 \end{pmatrix} \qquad H^{-1} - H^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверка свойств ортогональной матрицы

$$H^{\langle 1 \rangle} \cdot H^{\langle 1 \rangle} = 1$$

$$H^{\langle 2 \rangle} \cdot H^{\langle 2 \rangle} = 1$$

"Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)"

ORIGIN := 1

Метод Крамера

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \Delta := |A| \qquad \Delta = -4$$

Определитель отличен от нуля,
система имеет единственное решение

$$A1 := \mathrm{augment}(B, \mathrm{submatrix}(A,1,4,2,4)) \qquad A1 = \begin{pmatrix} 30 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta1 := |A1| \qquad \Delta1 = -4$$

$$A2 := \mathrm{augment}(\mathrm{submatrix}(A,1,4,1,1), B, \mathrm{submatrix}(A,1,4,3,4)) \qquad A2 = \begin{pmatrix} 1 & 30 & 3 & 4 \\ -1 & 10 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta2 := |A2| \qquad \Delta2 = -8$$

$$A3 := \mathrm{augment}(\mathrm{submatrix}(A,1,4,1,2), B, \mathrm{submatrix}(A,1,4,4,4)) \qquad A3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 30 & 4 \\ -1 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta3 := |A3| \qquad \Delta3 = -12$$

$$A4 := \mathrm{augment}(\mathrm{submatrix}(A,1,4,1,3), B) \qquad A4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 30 \\ -1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\Delta4 := |A4| \qquad \Delta4 = -16$$

Конечное решение заданной СЛАУ:

$$x := \begin{pmatrix} \frac{\Delta1}{\Delta} & \frac{\Delta2}{\Delta} & \frac{\Delta3}{\Delta} & \frac{\Delta4}{\Delta} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Метод обратной матрицы $x := A^{-1} \cdot B$ $\qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Стандартная функция Mathcad

$$x := \mathrm{lsolve}(A, B) \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Пример выполнения

2.3. "Модель взаимодействия экологических и экономических систем"

$ORIGIN := 1$

Матрица межотраслевого баланса

$$B := \begin{pmatrix} 50 & 16 & 120 & 60 \\ 30 & 10 & 180 & 100 \\ 15 & 14 & 140 & 80 \end{pmatrix}$$

Вектор удельных выбросов вредного вещества на 1-цу продукции

$$C := \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.26 \\ 0.34 \end{pmatrix}$$

Вектор общего выпуска

$$X := B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 246 \\ 320 \\ 249 \end{pmatrix}$$

Суммарное количество выбросов вредного вещества

$$Z := X \cdot C \qquad Z = 177.7$$

Выполняем последовательное построение структурной матрицы

$$X1 := \mathrm{submatrix}(B, 1, 3, 1, 3) \qquad X1 = \begin{pmatrix} 50 & 16 & 120 \\ 30 & 10 & 180 \\ 15 & 14 & 140 \end{pmatrix}$$

Формируем диагональную матрицу X3

$$i := 1..3 \qquad X2_i := \frac{1}{X_i}$$

$$X3 := \mathrm{diag}(X2)$$

В итоге диагональная матрица равна

$$X3 = \begin{pmatrix} 4.065 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 3.125 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 4.016 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Получаем структурную матрицу коэффициентов прямых затрат

$$A := X1 \cdot X3$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.203 & 0.05 & 0.482 \\ 0.122 & 0.031 & 0.723 \\ 0.061 & 0.044 & 0.562 \end{pmatrix}$$

Находим матрицу Е-А

$$E := \mathrm{identity}(3) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$EA := E - A \qquad EA = \begin{pmatrix} 0.797 & -0.05 & -0.482 \\ -0.122 & 0.969 & -0.723 \\ -0.061 & -0.044 & 0.438 \end{pmatrix}$$

Проверка условия Хаукинса - Саймона:

$$|EA| = 0.277$$

$$|\mathrm{submatrix}(EA,1,2,1,2)| = 0.766$$

$$|\mathrm{submatrix}(EA,1,1,1,1)| = 0.797$$

Вычисление выпуска при заданном конечном спросе Y

$$Y := \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$$EAinv := (EA)^{-1}$$

$$EAinv = \begin{pmatrix} 1.418 & 0.155 & 1.817 \\ 0.352 & 1.154 & 2.293 \\ 0.233 & 0.137 & 2.767 \end{pmatrix}$$

Находим при тех же коэффициентах прямых затрат общий выпуск

$$X := EAinv \cdot Y$$

$$X = \begin{pmatrix} 383.18 \\ 483.521 \\ 375.827 \end{pmatrix}$$

Суммарное количество выбросов вредного вещества

$$X \cdot C = 268.824$$

Элементы 3-го столбца матрицы EAinv указывают на изменение выпуска в производственных секторах при увеличении на одну единицу потребности в услугах транспорта.

Увеличение потребности в транспортных услугах на 5% составляет:

$$D := 0.05 \cdot X_3 \qquad D = 18.791$$

Соответствующее увеличение выпуска товаров
и услуг равно:

$$Xn := D \cdot EAinv^{\langle 3 \rangle}$$

$$Xn = \begin{pmatrix} 34.152 \\ 43.096 \\ 51.991 \end{pmatrix}$$

Увеличение количества выбросов вредного вещества

$$Xn \cdot C = 30.248$$