

Тема: «Применение дифференциальных уравнений  
для моделирования экологических систем»

### Введение

Методы теории дифференциальных уравнений являются наиболее эффективными для создания математических моделей, которые описывают динамику экосистем, учитывая взаимодействие, как между отдельными элементами экосистемы, так и между элементами экосистемы и внешними факторами среды, в которой функционирует каждый элемент экосистемы. Поэтому, возможности дифференциальных уравнений, как аппарата моделирования очень велики, поскольку получаемые уравнения могут описывать разные виды динамики биологических и экологических процессов. Рассмотрим основные понятия и методы теории дифференциальных уравнений и их применение для создания и исследования математических моделей.

Одним из основных понятий является **касательная** к точке кривой  $y = f(x)$ , т.е. такая прямая, которая имеет с кривой одну общую точку при бесконечном приближении к ней. Тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс определяется следующим равенством:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

где величина  $\Delta y$  называется приращением (изменением) функции при приращении (изменении) ее аргумента на величину  $\Delta x$ .

Представленное уравнение показывает возможность применения касательной для описания динамики различных природных процессов. Например, если пройденный телом путь  $S$  задан как функция времени  $\tau$ , то скорость движения тела (его динамика) в любой момент времени определяется как касательная или производная для искомого момента времени:

$$V = \lim_{\Delta \tau \rightarrow \infty} \frac{\Delta S}{\Delta \tau} = \frac{dS}{d\tau}$$

### Используемые инструменты Mathcad

Познакомимся с основными функциями Mathcad, предназначенными для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем, и с некоторыми инструментами для исследования уравнений: построения фазовых портретов кривых.

Почти все функции Mathcad предназначены для численного решения нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots \\ y_n' = \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = y_{01} \\ y_2(0) = y_{02} \\ \dots\dots\dots \\ y_n(0) = y_{0n} \end{cases}$$

Численное решение этой задачи состоит в построении таблицы приближенных значений  $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  решения  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , ...,  $y_n(x)$  на отрезке  $[x_0, x_N]$  в точках  $x_0, x_1, \dots, x_N$  которые называются **узлами сетки**. Обозначив

$$\mathbf{Y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$$

$$\mathbf{Y}_0(x) = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n})$$

$$\mathbf{Y}'(x) = (y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x))$$

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{Y}) = (f_1(x, y_1, \dots, y_n), f_2(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n)),$$

где  $\mathbf{Y}$  – искомое решение;  $\mathbf{Y}_0$  – вектор начальных условий;  $\mathbf{F}(x, \mathbf{Y})$  – вектор правых частей. Можно записать систему дифференциальных уравнений в векторной форме:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}) \quad \mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{Y}_0$$

В Mathcad решить такую систему можно с помощью следующих функций:

**rkfixed**( $y, x1, x2, npoints, D$ ) – решение задачи на отрезке методом Рунге – Кутта с постоянным шагом;

**Rkadapt**( $y, x1, x2, npoints, D$ ) – решение задачи на отрезке методом Рунге – Кутта с автоматическим выбором шага;

**rkadapt**( $y, x1, x2, ace, npoints, D, kmax, save$ ) – решение задачи в заданной точке методом Рунге – Кутты с автоматическим выбором шага;

**Bulstoer**( $y, x1, x2, npoints, D$ ) – решение задачи на отрезке методом Булирша – Штера;

**bulstoer**( $y, x1, x2, acc, npoints, D, kmax, save$ ) – решение задачи в заданной точке методом Булирша – Штера;

**Stiffr**( $y, x1, x2, acc, D, J$ ) – решение задачи для жестких систем на отрезке с использованием алгоритма Розенброка;

**stiff**( $y, x1, x2, acc, D, J, kmax, save$ ) – решение задач для жестких систем в заданной точке с использованием алгоритма Розенброка;

**Stiffb**( $y, x1, x2, acc, D, J$ ) – решение задачи для жестких систем на отрезке с использованием алгоритма Булирша – Штера;

**stiffb**( $y, x1, x2, acc, D, J, kmax, save$ ) – решение задач для жестких систем в заданной точке с использованием алгоритма Булирша – Штера.

Смысл параметров для всех функций одинаков и определяется математической постановкой задачи:

$y$  – вектор начальных условий  $\mathbf{Y}_0$ ,  $y_i = (\mathbf{Y})_i$

$x1, x2$  – начальная и конечная точки отрезка интегрирования системы; для функций, вычисляющих решение в заданной точке,  $x1$  – начальная точка,  $x2$  – заданная точка;

$npoints$  – число узлов на отрезке  $[x1, x2]$ ; при решении задачи на отрезке результат содержит  $npoints + 1$  строку;

$D$  – имя вектора-функции  $D(x, y)$ , содержащей правые части  $\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y})$ ,  $D_i(x, y) = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ ;

$J$  – имя матрицы-функции  $J(x, y)$  размерности  $n \times (n+1)$ , в которой содержится матрица Якоби правых частей:

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f_n(x, y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x, y)}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

$acc$  – параметр, контролирующий погрешность решения при автоматическом выборе шага интегрирования (если погрешность решения больше  $acc$ , то шаг сетки уменьшается; шаг уменьшается до тех пор, пока его значение не станет меньше  $save$ );

$kmax$  – максимальное число узлов сетки, в которых может быть вычислено решение задачи на отрезке (максимальное число строк в результате);

$save$  – наименьшее допустимое значение шага неравномерной сетки.

Результат работы каждой функции – матрица, содержащая  $(n+1)$  столбец; ее первый столбец содержит координаты узлов сетки, второй

столбец – вычисленные приближенные значения решения  $y_1(x)$  в узлах сетки;  $(k+1)$ -й – значения решения  $y_k(x)$ .

Один из вопросов, который часто возникает в современной экологии, состоит в следующем: как определить численность той или иной популяции через определенное время? Ответ на него представляет большое теоретическое и практическое значение, например, без него нельзя планировать эксплуатацию возобновляемых природных ресурсов – промысловых рыб, охотничьих угодий, лугов и т.д. В решении этого вопроса может помочь математические методы теории дифференциальных уравнений. Рассмотрим несколько моделей, которые проиллюстрируют подходы к решению этих вопросов.

#### Лабораторная работа № 3.1

### Модель "Динамика популяций". Аналитическое решение дифференциальных уравнений в MathCad

Классический пример наиболее простой задачи развития численности популяции сформулирован в виде модели "Динамика популяций" следующим образом. В благоприятных условиях (нет ограничения в корме и пространстве обитания) находится некоторая популяция (сообщество особей одного вида), которая имеет в момент времени  $t_0=0$  биомассу  $x_0$ . В результате длительных наблюдений установлено, что в каждый момент времени скорость увеличения биомассы популяции пропорциональна уже имеющейся биомассе, а возникающие явления отмирания (самоотравления) снижают биомассу пропорционально квадрату наличной биомассы. Обозначим биомассу в момент времени  $t$  через  $x(t)$ , а ее изменение за время  $\Delta t$  через  $\Delta x$ , тогда можно записать следующее приближенное равенство:

$$\Delta x_+ \approx k \cdot x \cdot \Delta t \quad - \text{увеличение биомассы за счет прироста};$$

$$\Delta x_- \approx -\alpha \cdot x^2 \cdot \Delta t \quad - \text{уменьшение за счет отмирания}.$$

В результате получаем:

$$\Delta x \approx \Delta x_+ + \Delta x_-$$

$$\Delta x \approx (k \cdot x - \alpha \cdot x^2) \cdot \Delta t ,$$

где  $\alpha$  и  $k$  – постоянные скорости отмирания и прироста биомассы.

В дифференциальной форме это же соотношение имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x - \alpha \cdot x^2 \quad (3.1)$$

Это уравнение представляет собой математическую модель процесса изменения биомассы популяции во времени. Теперь для того чтобы найти, какова биомасса популяций будет в определенный момент  $t$ , необходимо либо дождаться этого момента и непосредственным измерением определить ее (хотя возможно, это не всегда можно реально осуществить), либо воспользоваться полученной математической моделью. Естественно, мы выберем второй путь и воспользуемся для этого набором инструментов предоставляемых MathCad.

Вначале разделим переменные в уравнении (3.1), и запишем его в интегральной форме при начальном условии  $x(t_0)=x_0$ :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x \cdot (k - \alpha \cdot x)} = \int_0^{t_1} dt \quad (3.2)$$

MathCad предоставляет несколько методов для символьного и (или) численного решения таких уравнений. Многообразие численных методов встроенных в MathCad было представлено выше.

Полученное уравнение является классическим уравнением с разделенными переменными, поэтому его решение и анализ достаточно легко осуществляется с помощью символьных методов.

Выполнить символьное интегрирование (как и дифференцирование) можно следующими способами:

1. При помощи команды **Символы=>Переменные=>Интеграция (Symbolics=> Variable =>Integrate)**.

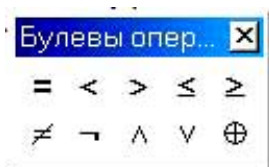
2. При помощи символа интеграла. Символ определенного интеграла вводится при помощи клавиши [**&**] (в En-раскладке клавиатуры). Символ



неопределенного интеграла при помощи комбинации [**Ctrl+I**]. Оба этих символа можно создать и с помощью панели **Матанализ (Calculus)**. Далее чтобы получить первообразную, необходимо выбрать команду **Симво-**

**лы=>Расчеты=>Символические (Symbolics=>Evaluate=>Symbolically)**.

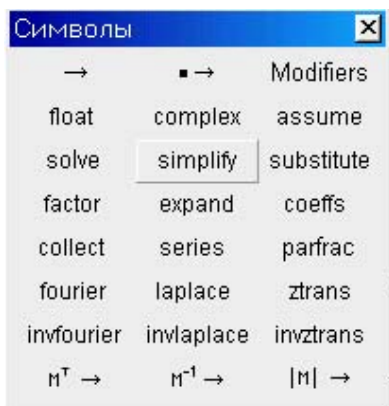
3. Еще один способ - использовать знак символьного равенства ( $\rightarrow$ , который вводится при помощи комбинации [**Ctrl+точка**])



При записи уравнения (3.2) (как и других уравнений) необходимо обязательно использовать **жирный** знак равенства, который можно создать с помощью панели **Булевы операторы (Boolean)** или клавиш [Ctrl+=].

После нахождения определенного интеграла, например, используя знак символического равенства ( $\rightarrow$ ), при условии  $x(0)=x_0$  и  $x(t_1)=x_1$ , получают уравнение в виде суммы:

$$\frac{-(-\ln(x_1) + \ln(k - \alpha \cdot x_1))}{k} - \frac{(\ln(x_0) - \ln(k - \alpha \cdot x_0))}{k} = t_1$$



Этот результат необходимо скопировать на отдельную строку, используя буфер обмена и сделать замену  $x_1$  на  $x$  и  $t_1$  на  $t$ . Далее помещают курсор в область полученного уравнения, выбирают команду **Символы=>Упростить** или используют команду **simplify** панели **Символы** и упрощают:

$$\frac{(\ln(x) - \ln(k - \alpha \cdot x) - \ln(x_0) + \ln(k - \alpha \cdot x_0))}{k} = t \quad (3.3)$$

Чтобы преобразовать выражение (3.3) к зависимости биомассы популяции  $x$  от времени  $t$  используют команду **solve** панели **Символы** с указанием в качестве параметра  $x$ . Полученный результат команды **solve** является итоговым аналитическим решением:

$$x(t) := x_0 \cdot k \cdot \frac{\exp(t \cdot k)}{(k - \alpha \cdot x_0 + x_0 \cdot \alpha \cdot \exp(t \cdot k))}$$

Проведем исследование полученного уравнения модели "Динамика популяций". Зададим начальные значения для модели:

- начальное количество биомассы  $x_{01}$ ;
- коэффициент прироста биомассы  $k_1$ ;
- коэффициент отмирания биомассы  $\alpha_1$ ;
- интервал изменения  $t$  функции  $x_1(t)$ .

Для численных расчетов будем использовать не оригинальное уравнение  $x(t)$ , а ее копию  $x1(t)$ , с соответствующими  $x_{01}$ ,  $k_1$ ,  $\alpha_1$ . Оригинальное уравнение  $x(t)$  будем использовать для аналитических преобразований.

Удобным средством экспресс - исследования является графическое представление функций. Однако, график, хотя и является важным и эффективным вспомогательным средством исследования кривой, позволяет

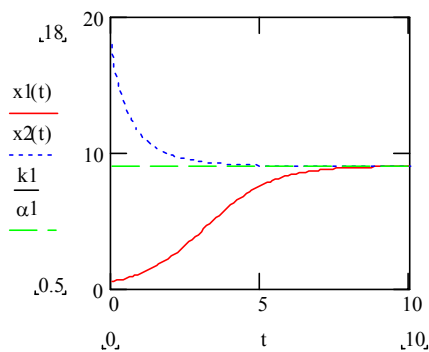
сделать только качественный анализ поведения кривой. Для того чтобы узнать числовые характеристики каких-либо интересующих экстремальных или произвольных точек, приходится прибегать к аналитическим методам исследования.

Одним из важных моментов в задачах прогноза является определение состояния явления при бесконечно большой длительности его протекания. С помощью предела находим количество биомассы при бесконечно большой длительности ее существования при заданных условиях. Для получения решения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) \rightarrow$$

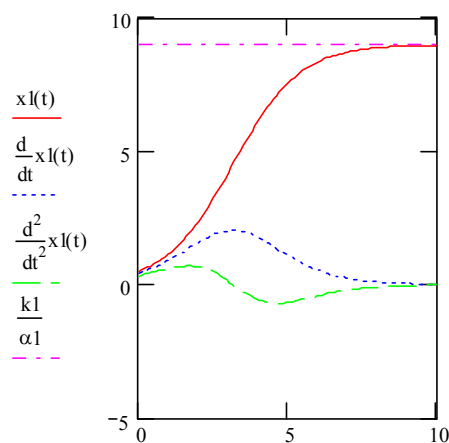
используют символьный знак равенства ( $\rightarrow$ ).

Строим график (см. пример выполнения) изменения количества биомассы популяции во времени, когда начальное ее количество  $x_{01}$  отличается от предельного значения в большую или меньшую сторону.



Следующим важным прикладным вопросом

является вопрос: когда и сколько без ущерба собирать "урожая" с рассматриваемой популяции, т.е. изымать часть биомассы из экосистемы, чтобы суммарный урожай был бы максимален. Чтобы получить на него ответ, необходимо выяснить существование экстремума скорости прироста биомассы, а для этого находим ее предельное значение, как:



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} x_1(t) \rightarrow$$

Момент времени  $t$ , когда скорость прироста биомассы максимальна находят, используя команду **solve** панели **Символы** с указанием в качестве параметра  $t$ :

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = 0 \text{ solve, } t \rightarrow$$

после работы команды **solve** получают результат:

Гороховский А.Н.

$$t_m = \frac{\ln \left[ \frac{(k - \alpha \cdot x_0)}{\alpha \cdot x_0} \right]}{k}$$

Полученный результат таков (см. пример выполнения): начиная с этого момента  $t_m$  необходимо вести непрерывный сбор урожая поддерживая величину биомассы популяции не выше значения, которое получают опять с помощью команды **solve**, но для параметра  $x_0$ :

$$\frac{\ln \left[ \frac{(k - \alpha \cdot x_0)}{\alpha \cdot x_0} \right]}{k} = 0 \text{ solve, } x_0 \rightarrow$$

Получают итоговый результат:

$$x_0 := \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{\alpha}$$

Переходим к рассмотрению следующей ситуации, когда популяция взаимодействует с другими популяциями. Учет этого обстоятельства значительно усложняет модель. Рассмотрим одну из таких моделей.

Лабораторная работа № 3.2

### Модель "Хищник-жертва". Численное решение дифференциальных уравнений и их систем в MathCad

В биологии и экологии многие модели развития популяций описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Поскольку популяции нескольких видов, как правило, оказывают влияние друг на друга, возникают связанные системы дифференциальных уравнений, как, например, в модели Вольтерра - Лотка "Хищник - жертва".

В этой модели животные - жертвы  $x_1(t)$  при отсутствии хищников размножаются с коэффициентом приращения  $g$ , а животные - хищники  $x_2(t)$  при отсутствии добычи (животных - жертв) вымирают с коэффициентом  $s$ . Благодаря встречам жертв с хищниками (вероятность встречи пропорциональна произведению обеих популяций) количество животных - жертв уменьшается (с коэффициентом  $a$ ), а количество хищников возрастает (с коэффициентом  $b$ ). Это описание явления приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:



$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1(t) = g \cdot x_1(t) - a \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) = -s \cdot x_2(t) + b \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

Таким образом, в модели предполагается, что при отсутствии хищников численность жертв возрастала бы экспоненциально с коэффициентом, например,  $g=0.3$ . При отсутствии добычи хищники вымирали бы также в соответствии с экспоненциальным законом и коэффициентом, например,  $s=0.3$ . Параметр, описывающий уменьшение численности жертв через вероятность их встреч с хищниками, примем равным  $a=0.02$ . Параметр, описывающий рост численности хищников благодаря их встречам с жертвами, равным  $b=0.004$ . Теперь, чтобы начать биологическую игру, зададим начальные значения количества животных, например, начальная популяция животных - жертв составляет 100 особей, а хищников - 40.

Поиск решения явной (разрешенной относительно старшей производной) системы дифференциальных уравнений (3.4) выполним при помощи стандартной функции *rkfixed*. При использовании этой функции начальные значения  $x_1(0)$  и  $x_2(0)$  должны быть представлены в виде вектора  $Y$ . Затем необходимо определить вектор - функцию  $D(t, Y)$ , которая представляет собой рассматриваемую систему дифференциальных уравнений (3.4):

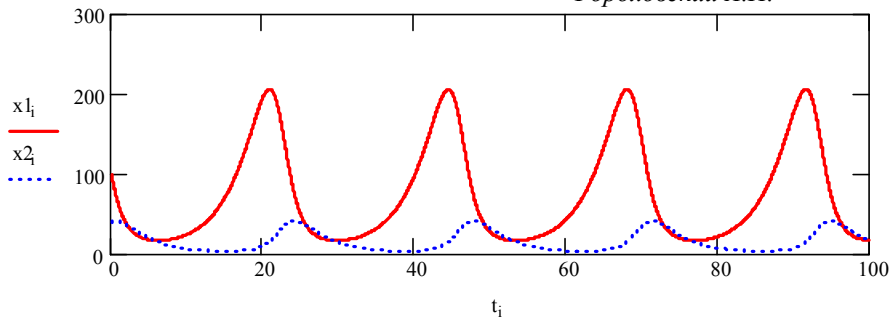
$$Y := \begin{bmatrix} 100 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$D(t, Y) := \begin{bmatrix} g \cdot Y_0 - a \cdot Y_0 \cdot Y_1 \\ -s \cdot Y_1 + b \cdot Y_0 \cdot Y_1 \end{bmatrix}$$

Кроме начального момента времени  $t_0$ , необходимо задать конечный момент времени  $t_k$  и число шагов  $N$ . Численное решение дифференциального уравнения получаем в виде матрицы, определяемой следующим образом:

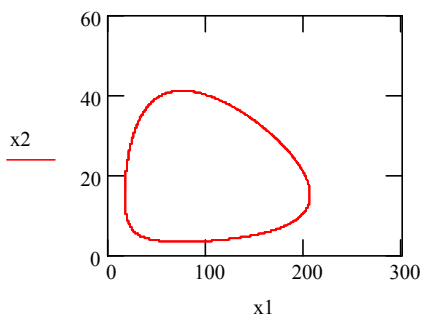
$$Z := \text{rkfixed}(Y, t_0, t_k, N - 1, D)$$

Решение  $Z$  является матрицей размера  $(N) \times (3)$ . Первый (нулевой) столбец этой матрицы содержит моменты времени  $t_0, t_0 + \Delta t \dots t_k$  с шагом  $\Delta t = \frac{t_k - t_0}{N}$ , следующие столбцы с номером 1 и 2 содержат значения искомым функций  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , соответствующие моментам времени из нулевого столбца.



Полученный на первом графике результат (см. пример выполнения) показывает, что процесс имеет колебательный

характер. Вначале хищники уничтожают много животных-жертв, популяция жертв не успевает восстанавливаться. Уменьшение количества пищи через некоторое время начинает сказываться на популяции хищников, и, когда число жертв достигает величины  $x_1 = \frac{s}{b} = 75$  (в этой точке  $\frac{dx_2}{dt} = 0$ )



число хищников тоже начинает сокращаться вместе с сокращением жертв.

Сокращение популяции происходит до тех пор, пока число хищников не достигнет величины  $x_2 = \frac{g}{a} = 15$  (в этой точке  $\frac{dx_1}{dt} = 0$ ). С этого

момента начинает расти популяция жертв; через некоторое время пищи становится достаточно, чтобы обеспечить прирост хищников, обе популяции растут, и процесс повторяется снова и снова.

На графике четко виден периодический характер процесса. Количество жертв и хищников колеблется возле величин  $x_1 = 75$  и  $x_2 = 15$ . Периодичность процесса явственно видна на фазовой плоскости: фазовая кривая  $(x_1(t), x_2(t))$  — замкнутая линия (см. пример выполнения). Самая левая точка этой кривой,  $x_2 = 15$  — это точка, в которой число жертв достигает наименьшего значения. Самая правая точка — точка пика популяции жертв. Между этими точками количество хищников сначала убывает до нижней точки фазовой кривой,  $x_1 = 75$ , где достигает наименьшего значения, а затем растет до верхней точки фазовой кривой. Фазовая кривая охватывает точку с координатами  $x_1 = 75$ ,  $x_2 = 15$ .

На языке дифференциальных уравнений это означает, что система имеет стационарное состояние  $\frac{dx_1}{dt} = 0$ ,  $\frac{dx_2}{dt} = 0$ , которое достигается в точке  $x_1 = 75$ ,  $x_2 = 15$ . Если в начальный момент система находилась в

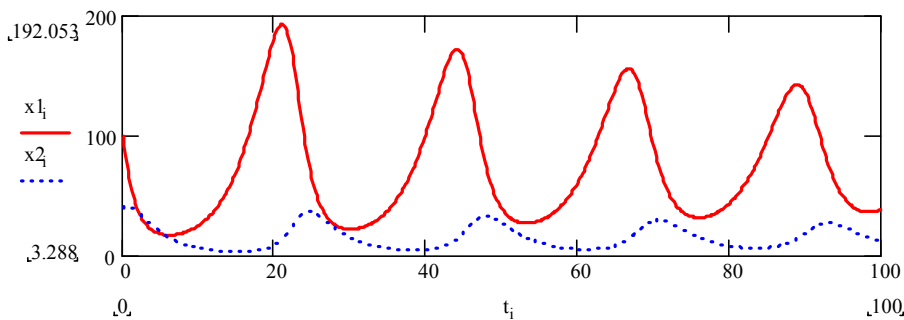
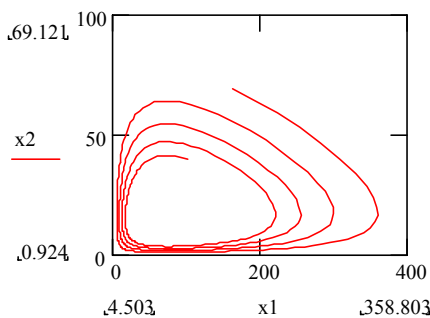
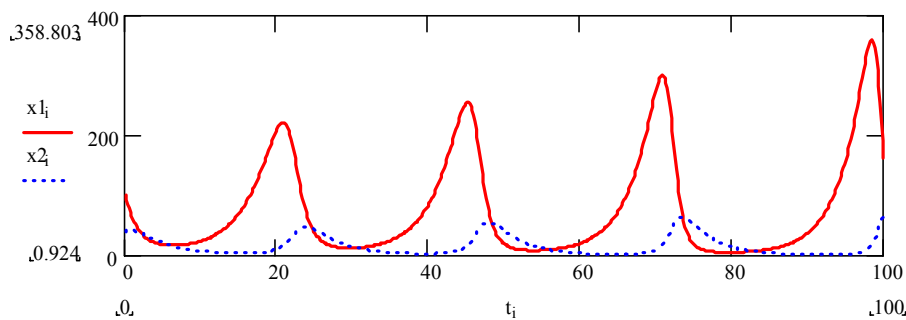
стационарной точке, то решения  $x_1(t), x_2(t)$  не будут изменяться во времени и останутся постоянными. Всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию решений. Неэллиптичность формы траектории, охватывающей центр, отражает негармонический характер колебаний.

Лабораторная работа № 3.3

**Модель "Хищник-жертва"**  
с логистической поправкой

Рассмотрим модель конкурирующих видов с "логистической поправкой" ( $\gamma \cdot x_i^2$ ):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_1(t) = g \cdot x_1(t) - a \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) + \gamma \cdot x_1(t)^2 \\ \frac{d}{dt} x_2(t) = -s \cdot x_2(t) + b \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) + \gamma \cdot x_2(t)^2 \end{cases}, \quad (3.5)$$



с помощью которой можно моделировать ситуации положительного ( $+\gamma$ ) или отрицательного ( $-\gamma$ ) внешнего влияния на экосистему. В этом случае поведение решений в окрестности стационарной точки

меняется в зависимости от величины и знака параметра  $\gamma$ .

В случае положительного влияния, например, в результате дополнительного попол-

нения экосистемы биологическими объектами, стационарная точка является неустойчивым фокусом и амплитуда колебаний численности

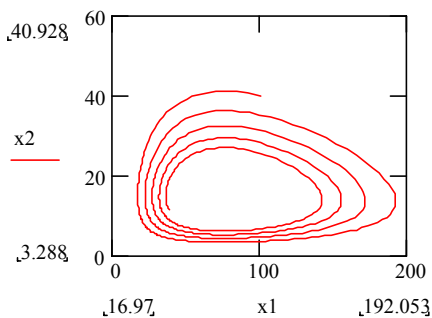
видов растет. Как бы близко ни было начальное состояние к стационар-

ному, с течением времени состояние системы будет сильно отличаться от стационарного (см. пример выполнения).

В случае отрицательного влияния, например, внутривидовой конкуренции за пищу при ограниченных ресурсах или в результате изымания биологических объектов из экосистемы, стационарная точка превращается в устойчивый фокус, а решения — в затухающие колебания. При любом начальном состоянии экосистемы через некоторое время ее состояние становится близким к стационарному и стремится к нему при  $t \rightarrow \infty$  (см. пример выполнения).

#### Лабораторная работа № 3.4

### Модель Холлинга – Тэннера «Конкурирующие виды»



На примере простой модели Вольтерра – Лотка и с логистической поправкой было продемонстрировано одно из важнейших свойств модельных экосистем, находящихся в равновесии — они могут легко разрушаться даже при наличии незначительных возмущающих факторов.

Конечно, большинство моделей является идеализацией действительности: в них внимание сосредоточено на некоторых основных переменных и соотношениях между ними. Поэтому устойчивость моделей относительно малых возмущений чрезвычайно важна при их практическом использовании. Модели, не чувствительные к малым возмущениям, получили название **грубые**.

Модель Вольтерра – Лотка неустойчива относительно возмущений, поскольку ее стационарное состояние — центр. Существует другой вид моделей, в которых возникают незатухающие колебания, — это модели, имеющие на фазовых портретах предельные циклы. Такая модель существует для системы конкурирующих видов — это модель Холлинга – Тэннера.

Скорость роста популяции жертв  $\frac{dx_1}{dt}$  в этой модели равна сумме трех величин:

1. скорости размножения особей в отсутствие хищников:  $r \cdot x_1$ ;

2. влияния внутривидовой конкуренции за пищу при ограниченных ресурсах  $-r \cdot x_1 \frac{x_1}{K}$ ;

$$-r \cdot x_1 \frac{x_1}{K};$$

3. влияния хищников  $-w \cdot x_2 \frac{x_1}{D+x_1}$  в предположении, что хищник перестает убивать, когда насыщается.

Скорость роста популяции хищников  $\frac{dx_2}{dt}$  строится так же, как в модели Вольтерра – Лотка, в предположении, что жертвы встречаются редко. Если для поддержания жизни одного хищника нужно  $J$  жертв, то популяция из  $x_1$  жертв сможет обеспечить пищей  $\frac{x_1}{J}$  хищников. Модель роста популяции хищников, в которой их число не может превысить эту критическую величину, имеет вид  $\frac{dx_2}{dt} = x_2 \cdot \left( c - \frac{c \cdot J}{x_1} \cdot x_2 \right)$ . Таким образом, модель Холдинга – Тэннера имеет вид:

Скорость роста популяции хищников  $\frac{dx_2}{dt}$  строится так же, как в модели Вольтерра – Лотка, в предположении, что жертвы встречаются редко. Если для поддержания жизни одного хищника нужно  $J$  жертв, то популяция из  $x_1$  жертв сможет обеспечить пищей  $\frac{x_1}{J}$  хищников. Модель роста популяции хищников, в которой их число не может превысить эту критическую величину, имеет вид  $\frac{dx_2}{dt} = x_2 \cdot \left( c - \frac{c \cdot J}{x_1} \cdot x_2 \right)$ . Таким образом, модель Холдинга – Тэннера имеет вид:

Скорость роста популяции хищников  $\frac{dx_2}{dt}$  строится так же, как в модели Вольтерра – Лотка, в предположении, что жертвы встречаются редко. Если для поддержания жизни одного хищника нужно  $J$  жертв, то популяция из  $x_1$  жертв сможет обеспечить пищей  $\frac{x_1}{J}$  хищников. Модель роста популяции хищников, в которой их число не может превысить эту критическую величину, имеет вид  $\frac{dx_2}{dt} = x_2 \cdot \left( c - \frac{c \cdot J}{x_1} \cdot x_2 \right)$ . Таким образом, модель Холдинга – Тэннера имеет вид:

Скорость роста популяции хищников  $\frac{dx_2}{dt}$  строится так же, как в модели Вольтерра – Лотка, в предположении, что жертвы встречаются редко. Если для поддержания жизни одного хищника нужно  $J$  жертв, то популяция из  $x_1$  жертв сможет обеспечить пищей  $\frac{x_1}{J}$  хищников. Модель роста популяции хищников, в которой их число не может превысить эту критическую величину, имеет вид  $\frac{dx_2}{dt} = x_2 \cdot \left( c - \frac{c \cdot J}{x_1} \cdot x_2 \right)$ . Таким образом, модель Холдинга – Тэннера имеет вид:

Скорость роста популяции хищников  $\frac{dx_2}{dt}$  строится так же, как в модели Вольтерра – Лотка, в предположении, что жертвы встречаются редко. Если для поддержания жизни одного хищника нужно  $J$  жертв, то популяция из  $x_1$  жертв сможет обеспечить пищей  $\frac{x_1}{J}$  хищников. Модель роста популяции хищников, в которой их число не может превысить эту критическую величину, имеет вид  $\frac{dx_2}{dt} = x_2 \cdot \left( c - \frac{c \cdot J}{x_1} \cdot x_2 \right)$ . Таким образом, модель Холдинга – Тэннера имеет вид:

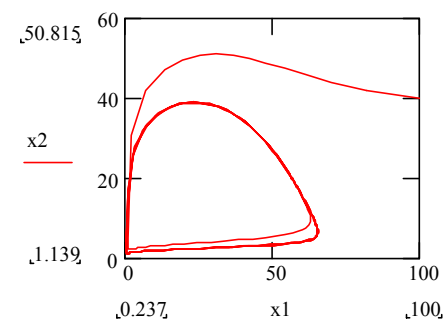
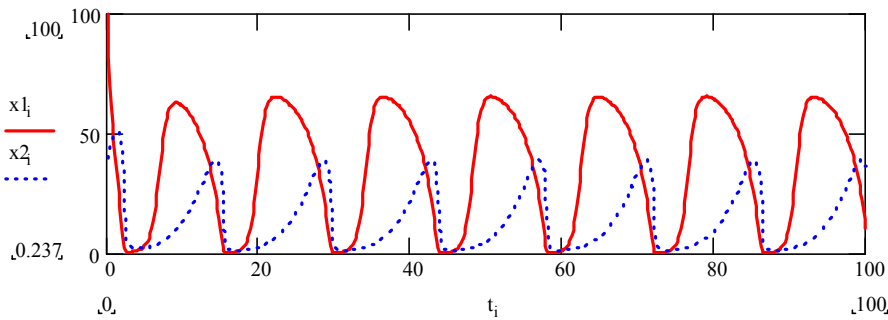
Скорость роста популяции хищников  $\frac{dx_2}{dt}$  строится так же, как в модели Вольтерра – Лотка, в предположении, что жертвы встречаются редко. Если для поддержания жизни одного хищника нужно  $J$  жертв, то популяция из  $x_1$  жертв сможет обеспечить пищей  $\frac{x_1}{J}$  хищников. Модель роста популяции хищников, в которой их число не может превысить эту критическую величину, имеет вид  $\frac{dx_2}{dt} = x_2 \cdot \left( c - \frac{c \cdot J}{x_1} \cdot x_2 \right)$ . Таким образом, модель Холдинга – Тэннера имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_1 = r \cdot \left( 1 - \frac{x_1}{K} \right) \cdot x_1 - w \cdot x_2 \cdot \frac{x_1}{D+x_1} \\ \frac{d}{dt} x_2 = c \cdot \left( 1 - \frac{J}{x_1} \cdot x_2 \right) \cdot x_2 \end{cases}, \quad (3.6)$$

где  $r, c, K, D, J > 0$ . При этом из (3.6) следует, что если:

$$c < \frac{r \cdot K - D - 2}{K \cdot (1 + D)}$$

на фазовом портрете системы будет устойчивый предельный цикл, т.е. все траектории, начинающиеся в окрестности замкнутой кривой спиралевидно будут приближаться к ней при  $t \rightarrow \pm\infty$ .



нутую кривую.

На рисунке примера видно, что фазовая кривая системы с начальным состоянием вне области, ограниченной предельным циклом, "наматываются" извне на одну и ту же замкнутую кривую.

На рисунке примера видно, что фазовая кривая системы с начальным состоянием вне области, ограниченной предельным циклом, "наматываются" извне на одну и ту же замкнутую кривую.

### **Контрольные вопросы**

1. Дайте определение понятия «производная функции».
2. С помощью каких инструментов Mathcad можно выполнить исследование математических моделей, включающих дифференциальные уравнения и системы.
3. Перечислите основные параметры стандартных функций Mathcad, которые применяют для численного решения дифференциальных уравнений и систем.
4. Опишите параметры и слагаемые, которые входят в модель «Динамика популяций». Какие процессы они описывают.
5. Укажите соотношение параметров модели, которое определяет состояние экосистемы при бесконечно большой продолжительности ее существования. Покажите это состояние на графике.
6. Как будет изменяться состояние экосистемы в зависимости от первоначального уровня популяции? Укажите процессы влияющие на эти изменения в каждом случае.
7. Найдите на графике момент времени, когда скорость прироста биомассы в экосистеме будет максимальна. Какому соотношению параметров модели «Динамика популяций» оно соответствует.
8. Опишите параметры и слагаемые, которые входят в модель Вольтерра-Лотка «Хищник-жертва». Какие процессы они описывают.
9. С помощью какого метода и функции Mathcad было получено решение системы дифференциальных уравнений составляющих модель «Хищник-жертва». Что представляют собой начальные параметры этой функции и конечное решение.
10. Прокомментируйте полученные график и фазовую кривую. Какие критические состояния проходит экосистема и соотношения каких параметров модели определяет эти состояния.
11. Укажите как будет меняться состояние экосистемы в зависимости от первоначального уровня «хищников» и «жертв». Укажите процессы, которые приводят к наблюдаемым изменениям в каждом случае.

12. Найдите на фазовой кривой точку стационарного состояния экосистемы. С чем связана неэллиптичность формы траектории фазовой кривой.
13. Укажите отличия модели «Хищник – жертва» от этой же модели, но с логистической поправкой. Какие ситуации можно моделировать с помощью модели с логистической поправкой.
14. Опишите параметры и слагаемые, которые входят в динамическую модель Холлинга – Тэннера «Конкурирующие виды». Какие процессы они описывают.
15. Дайте определения понятиям «грубая модель» и «предельный цикл». Покажите и охарактеризуйте «предельный цикл» развития экосистемы на графике.

## ЗАДАНИЕ

1. Лабораторная работа № 3.1. С помощью символьных методов Mathcad выполните аналитическое исследование динамики изменения биомассы популяций во времени, которая описывается математической моделью "Динамика популяций":

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x - \alpha \cdot x^2$$

Постройте графики скорости роста биомассы, изменение этой скорости и изменение количества биомассы популяции во времени. Определите момент времени когда скорость прироста биомассы максимальна.

2. Лабораторная работа № 3.2. Постройте графики решения и фазовые портреты динамической системы, моделирующей взаимодействие популяций по модели Вольтерра-Лотка "Хищник-жертва":

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1(t) = g \cdot x_1(t) - a \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) = -s \cdot x_2(t) + b \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \end{cases}$$

при заданных значениях параметров  $g$ ,  $a$ ,  $s$ ,  $b$ . Изменяя параметры модели исследуйте поведение решения.

3. Лабораторная работа № 3.3. Исследуйте поведение системы, моделирующей взаимодействие популяций:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1(t) = g \cdot x_1(t) - a \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) + \gamma \cdot x_1(t)^2 \\ \frac{d}{dt}x_2(t) = -s \cdot x_2(t) + b \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) + \gamma \cdot x_2(t)^2 \end{cases}$$

при заданных значениях параметров  $g$ ,  $a$ ,  $s$ ,  $b$  и при различных значениях параметра логистической поправки  $\gamma$ . Постройте графики решения и фазовые портреты для нескольких различных начальных состояний системы. Найдите значения параметра  $\gamma$ , при которых стационарное состояние является устойчивым, а при каких – неустойчивым.

4. Лабораторная работа № 3.4. Постройте графики решения и фазовые портреты, найдите предельные циклы динамической экосистемы Холлинга – Тэннера:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = r \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) \cdot x_1 - w \cdot x_2 \cdot \frac{x_1}{D + x_1} \\ \frac{d}{dt}x_2 = c \cdot \left(1 - \frac{J}{x_1} \cdot x_2\right) \cdot x_2 \end{cases},$$

моделирующей взаимодействие конкурирующих видов в условиях ограниченных природных ресурсов. Исследуйте поведение решения, изменяя параметры модели  $r$ ,  $K$ ,  $w$ ,  $c$ ,  $J$ .



Варианты к заданиям лабораторных работ № 3.1-3.4  
(подгруппа - А)

Лабораторная работа № 3.1.

Вариант	$x_0$	$k$	$\alpha$
1	0,57	0,09	0,42
2	0,58	0,69	0,4
3	0,37	0,63	0,07
4	0,19	0,33	0,54
5	0,19	0,95	0,78
6	0,05	0,03	0,16
7	0,41	0,96	0,75
8	0,93	0,52	0,22
9	0,28	0,76	0,83
10	0,24	0,53	0,41

Вариант	$x_0$	$k$	$\alpha$
11	0,58	0,45	0,91
12	0,91	0,14	0,12
13	0,87	0,59	0,98
14	0,4	0,67	0,06
15	0,14	0,8	0,66
16	0,58	0,37	0,8
17	0,16	0,37	0,72
18	0,22	0,49	0,63
19	0,38	0,43	0,16
20	0,88	0,11	0,25

Лабораторная работа № 3.2.

Вариант	$g$	$a$	$s$	$b$
1	4	3	2	1
2	4	3	2	2
3	4	3,5	2	1
4	4	3,5	2	2
5	4	3,5	3	1
6	4	3,5	3	2
7	4	3,5	4	4
8	4	3,5	4	3
9	5	3	2	1
10	5	3	3	1

Вариант	$g$	$a$	$s$	$b$
11	5	4	2	1
12	5	4	3	1
13	5	4	2	2
14	5	4	2	3
15	5	4,5	2	1
16	4	3	2	3
17	4	3	2	4
18	4	3,5	2	3
19	4	3,5	2	4
20	4	3,5	3	3

Начальные значения  $x_1(0)=2$  и  $x_2(0)=1,6$ .

## Лабораторная работа № 3.3.

<b>Вариант</b>	$\gamma$	<b>Вариант</b>	$\gamma$	<b>Вариант</b>	$\gamma$	<b>Вариант</b>	$\gamma$	<b>Вариант</b>	$\gamma$
<b>1</b>	0,10	<b>5</b>	0,05	<b>9</b>	0,17	<b>13</b>	0,30	<b>17</b>	0,07
<b>2</b>	0,15	<b>6</b>	0,22	<b>10</b>	0,18	<b>14</b>	0,40	<b>18</b>	0,09
<b>3</b>	0,20	<b>7</b>	0,12	<b>11</b>	0,10	<b>15</b>	0,50	<b>19</b>	0,11
<b>4</b>	0,25	<b>8</b>	0,14	<b>12</b>	0,20	<b>16</b>	0,05	<b>20</b>	0,10

Для выполнения задания значения параметров  $g$ ,  $a$ ,  $s$ ,  $b$  взять из соответствующих вариантов задания лабораторной работы № 3.2. Начальные значения  $x_1(0)=3$  и  $x_2(0)=1$ .

## Лабораторная работа № 3.4.

<b>Вариант</b>	$r$	$K$	$W$	$c$	$J$	$D$
<b>1</b>	1	7	1,52	0,2	0,5	1
<b>2</b>	1	7	1,74	0,2	0,5	1
<b>3</b>	1	7	1,96	0,2	0,5	1
<b>4</b>	1	7	2,00	0,2	0,5	1
<b>5</b>	1	7	1,54	0,2	0,5	2
<b>6</b>	1	7	1,76	0,2	0,5	2
<b>7</b>	1	7	1,92	0,2	0,5	2
<b>8</b>	1	7	2,00	0,2	0,5	2
<b>9</b>	1	7	1,56	0,2	0,5	1,5
<b>10</b>	1	7	1,72	0,2	0,5	1,5
<b>11</b>	1	7	1,94	0,2	0,5	1,5
<b>12</b>	1	7	2,00	0,2	0,5	1,5
<b>13</b>	1	7	1,53	0,2	0,5	1,5
<b>14</b>	1	7	1,75	0,2	0,5	1,5
<b>15</b>	1	8	1,91	0,2	0,5	1
<b>16</b>	1	8	2,00	0,25	0,5	1
<b>17</b>	1	8	1,50	0,3	0,5	1
<b>18</b>	1	8	1,70	0,15	0,5	1
<b>19</b>	1	8	1,90	0,15	0,7	1
<b>20</b>	1	8	2,00	0,25	0,7	1

Начальные значения  $x_1(0)=3$  и  $x_2(0)=1$ .

Варианты к заданиям лабораторных работ № 3.1-3.4  
(подгруппа - Б)

Лабораторная работа № 3.1.

Вариант	$x_0$	$k$	$\alpha$
1	0,27	0,85	0,06
2	0,18	0,93	0,76
3	0,08	0,87	0,49
4	0,64	0,82	0,31
5	0,21	0,44	0,92
6	0,2	0,94	0,37
7	0,05	0,86	0,08
8	0,68	0,13	0,17
9	0,38	0,89	0,65
10	0,21	0,06	0,2

Вариант	$x_0$	$k$	$\alpha$
11	0,47	0,18	0,1
12	0,25	0,78	0,11
13	0,77	0,45	0,24
14	0,38	0,25	0,29
15	0,51	0,79	0,17
16	0,74	0,88	0,94
17	0,49	0,87	0,51
18	0,14	0,13	0,91
19	0,48	0,78	0,13
20	0,85	0,8	0,35

Лабораторная работа № 3.2.

Вариант	$g$	$a$	$s$	$b$
1	4	3,5	3	3
2	4	3,5	2	4
3	4	3,5	2	3
4	4	3	2	3
5	4	3	2	3
6	5	4,5	2	1
7	5	4	2	3
8	5	4	2	2
9	5	4	3	1
10	5	4	2	1

Вариант	$g$	$a$	$s$	$b$
11	5	3	3	1
12	5	3	2	1
13	4	3,5	4	3
14	4	3,5	4	4
15	4	3,5	3	2
16	4	3,5	3	1
17	4	3,5	2	2
18	4	3,5	2	1
19	4	3	2	2
20	4	3	2	1

Начальные значения  $x_1(0)=1,98$  и  $x_2(0)=1,59$ .

## Лабораторная работа № 3.3.

<b>Вариант</b>	$\gamma$	<b>Вариант</b>	$\gamma$	<b>Вариант</b>	$\gamma$	<b>Вариант</b>	$\gamma$	<b>Вариант</b>	$\gamma$
<b>1</b>	0,49	<b>5</b>	0,48	<b>9</b>	0,35	<b>13</b>	0,08	<b>17</b>	0,09
<b>2</b>	0,21	<b>6</b>	0,06	<b>10</b>	0,34	<b>14</b>	0,36	<b>18</b>	0,23
<b>3</b>	0,29	<b>7</b>	0,13	<b>11</b>	0,22	<b>15</b>	0,31	<b>19</b>	0,18
<b>4</b>	0,39	<b>8</b>	0,42	<b>12</b>	0,46	<b>16</b>	0,14	<b>20</b>	0,34

Для выполнения задания значения параметров  $g$ ,  $a$ ,  $s$ ,  $b$  взять из соответствующих вариантов задания лабораторной работы № 3.2. Начальные значения  $x_1(0)=2,98$  и  $x_2(0)=1,05$ .

## Лабораторная работа № 3.4.

<b>Вариант</b>	$r$	$K$	$W$	$c$	$J$	$D$
<b>1</b>	1	7	1,76	0,2	0,5	1
<b>2</b>	1	7	1,73	0,2	0,5	1
<b>3</b>	1	7	1,93	0,2	0,5	1
<b>4</b>	1	7	1,57	0,2	0,5	1
<b>5</b>	1	7	1,76	0,2	0,5	2
<b>6</b>	1	7	1,63	0,2	0,5	2
<b>7</b>	1	7	1,73	0,2	0,5	2
<b>8</b>	1	7	1,94	0,2	0,5	2
<b>9</b>	1	7	1,60	0,2	0,5	1,5
<b>10</b>	1	7	1,66	0,2	0,5	1,5
<b>11</b>	1	7	1,98	0,2	0,5	1,5
<b>12</b>	1	7	1,53	0,2	0,5	1,5
<b>13</b>	1	7	2,00	0,2	0,5	1,5
<b>14</b>	1	7	1,59	0,2	0,5	1,5
<b>15</b>	1	8	1,96	0,2	0,5	1
<b>16</b>	1	8	1,79	0,25	0,5	1
<b>17</b>	1	8	1,84	0,3	0,5	1
<b>18</b>	1	8	1,78	0,15	0,5	1
<b>19</b>	1	8	1,87	0,15	0,7	1
<b>20</b>	1	8	1,95	0,25	0,7	1

Начальные значения  $x_1(0)=3,1$  и  $x_2(0)=1,1$ .

Приклад виконання

Лабораторная работа №3  
Тема: "Застосування диференціальних рівнянь для моделювання екологічних систем"

3.1. Модель "Динаміка популяцій". Аналітичне розв'язання диференціальних рівнянь у Mathcad

$$\frac{d}{dt}x = k \cdot x - \alpha \cdot x^2$$

Пошук аналітичного рішення

Після інтегрування диференціальне рівняння має рішення:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{x \cdot (k - \alpha \cdot x)} dx = \int_0^{t_1} 1 dt \rightarrow \frac{(\ln(x_1) - \ln(k - \alpha \cdot x_1))}{k} - \frac{(\ln(x_0) - \ln(k - \alpha \cdot x_0))}{k} = t_1$$

Після копіювання отриманого результату та заміни  $x_1$  на  $x$ , а  $t_1$  на  $t$ , отримуємо рівняння:

$$\frac{-(-\ln(x) + \ln(k - \alpha \cdot x))}{k} - \frac{(\ln(x_0) - \ln(k - \alpha \cdot x_0))}{k} = t$$

Виконуємо команду **Упростить** меню **Символы** та спрощуємо:

$$\frac{(\ln(x) - \ln(k - \alpha \cdot x) - \ln(x_0) + \ln(k - \alpha \cdot x_0))}{k} = t$$

Використовуємо ключове слово **solve** для аналітичного рішення, тобто здійснюємо пошук залежності біомаси популяції  $x$  від часу  $t$ :

$$\frac{(\ln(x) - \ln(k - \alpha \cdot x) - \ln(x_0) + \ln(k - \alpha \cdot x_0))}{k} = t \text{ solve, } x \rightarrow x_0 \cdot k \cdot \frac{\exp(t \cdot k)}{(k - \alpha \cdot x_0 + x_0 \cdot \alpha \cdot \exp(t \cdot k))}$$

Робимо копію отриманого результату **аналітичного рішення**

$$x(t) := x_0 \cdot k \cdot \frac{\exp(t \cdot k)}{(k - \alpha \cdot x_0 + x_0 \cdot \alpha \cdot \exp(t \cdot k))}$$

## Дослідження отриманої моделі

Початкові значення:

$$\begin{aligned} \text{початкова кількість біомаси} & \quad x_{01} := 0.5 \\ \text{коефіцієнт приросту біомаси} & \quad k_1 := 0.9 \quad t := 0, 0 + 0.1 \dots 10 \\ \text{коефіцієнт відмирання біомаси} & \quad \alpha_1 := 0.1 \end{aligned}$$

$$x_1(t) := x_{01} \cdot k_1 \cdot \frac{\exp(t \cdot k_1)}{(k_1 - \alpha_1 \cdot x_{01} + x_{01} \cdot \alpha_1 \cdot \exp(t \cdot k_1))}$$

Кількість біомаси при нескінченно великій тривалості її існування при заданих умовах:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) \rightarrow 9.$$

коли початкова кількість біомаси перевищує цю величину, приблизно у 2 рази:  $x_{02} := 9 \cdot 2$

$$x_2(t) := x_{02} \cdot k_1 \cdot \frac{\exp(t \cdot k_1)}{(k_1 - \alpha_1 \cdot x_{02} + x_{02} \cdot \alpha_1 \cdot \exp(t \cdot k_1))}$$

Будуємо графік для заданих значень

Швидкість приросту біомаси популяції:

$$v(t) := \frac{d}{dt} x_1(t)$$

при нескінченно великій тривалості її існування в наданих умовах:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \rightarrow 0$$

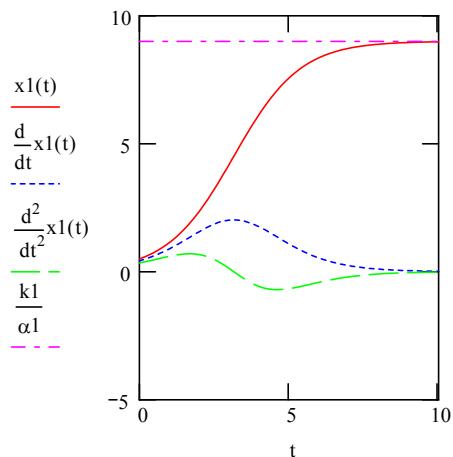
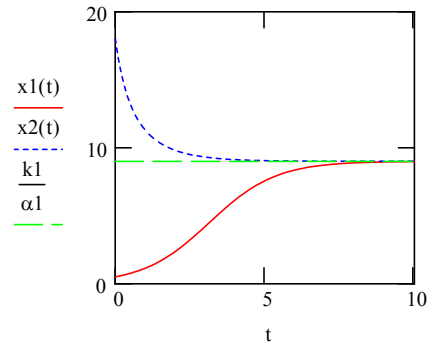
Будуємо графіки швидкості росту біомаси популяції та змінення цієї швидкості у часу

Момент часу, коли швидкість приросту біомаси максимальна:

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = 0 \text{ solve, } t \rightarrow \frac{\ln \left[ \frac{(k - \alpha \cdot x_0)}{(\alpha \cdot x_0)} \right]}{k}$$

Починаючи з цього моменту необхідно вести безупинний збір біомаси популяції до величини:

$$\frac{\ln \left[ \frac{(k - \alpha \cdot x_0)}{(\alpha \cdot x_0)} \right]}{k} = 0 \text{ solve, } x_0 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{\alpha}$$



Приклад виконання **3.2. Модель Вольтерра-Лотка "Хижак - жертва".  
Чисельне рішення диференціальних рівнянь та  
їх систем**

Система нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{d}{dt}x_1 = g \cdot x_1 - a \cdot x_1 \cdot x_2$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = -s \cdot x_2 + b \cdot x_1 \cdot x_2$$

$g := 0.3$	Коефіцієнт збільшення чисельності жертв при відсутності хижаків
$s := 0.3$	Коефіцієнт зменшення чисельності хижаків при відсутності жертв
$a := 0.02$	Параметр, що описує зменшення чисельності жертв завдяки їх зустрічі з хижаками
$b := 0.004$	Параметр, що описує збільшення чисельності хижаків завдяки їх зустрічі з жертвами

**Чисельне рішення системи диференціальних рівнянь:**

$x_1(0) = 100$      $x_2(0) = 40$     Початкові значення популяцій жертв та хижаків

Рішення системи диференціальних рівнянь за допомогою функції *rkfixed*

$Y$  представляє собою вектор початкових значень  $(Y_0, Y_1) = (x_1, x_2)$ . При різноманітних початкових значеннях ми отримуємо різну поведінку системи.

$$Y := \begin{pmatrix} 100 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Часовий інтервал для числених розрахунків:

$N := 400$	Число кроків для числених розрахунків
$t_0 := 0$	Початковий момент часу
$t_k := 100$	Кінцевий момент часу

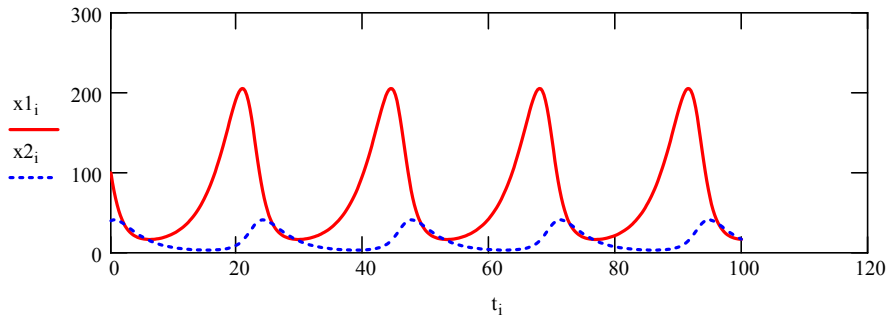
Вектор  $D$  вміщує диференціальні рівняння.

$$D(t, Y) := \begin{pmatrix} g \cdot Y_0 - a \cdot Y_0 \cdot Y_1 \\ -s \cdot Y_1 + b \cdot Y_0 \cdot Y_1 \end{pmatrix}$$

$Z := \text{rkfixed}(Y, t_0, t_k, N - 1, D)$	Застосування метода Рунге-Кутта. Рішення $Z$ представляє собою матрицю розміром $N \times 3$ . Перший стовпчик цієї матриці $Z^{<0>}$ вміщує моменти часу, наступні стовпчики $Z^{<1>}$ , $Z^{<2>}$ вміщують значення функцій $x_1$ , $x_2$ , що відповідають цим моментам.
$t := Z^{<0>}$	
$x_1 := Z^{<1>}$	
$x_2 := Z^{<2>}$	

Динаміка змінювання популяцій тварин-жертв та хижаків:  $i := 0..N - 1$

$$\begin{aligned} \max(x_1) &= 205.379 & \max(x_2) &= 41.076 \\ \min(x_1) &= 16.559 & \min(x_2) &= 3.311 \end{aligned}$$



основу свого існування, що приводить до зменшення чисельності самих хижаків. В результаті зменшення числа хижаків жертви можуть безперешкод

вимищувати більше жертв. Це повторюється через рівні інтервали часу.

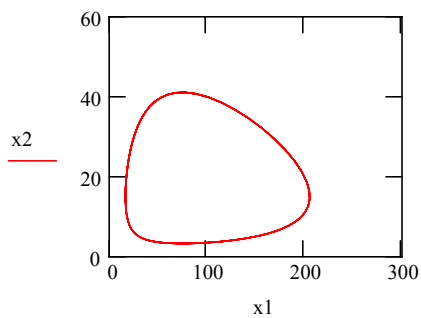
$$\text{При: } \frac{d}{dt}x_1 = 0 \quad gg \cdot xx1 - aa \cdot xx1 \cdot xx2 = 0 \text{ solve, } xx2 \rightarrow \frac{gg}{aa}$$

Таким чином, популяція жертв починає зростати при  $x_2$ , яке дорівнює  $\frac{gg}{a} = 15$

$$\text{При: } \frac{d}{dt}x_2 = 0 \quad -ss \cdot xx2 + bb \cdot xx1 \cdot xx2 = 0 \text{ solve, } xx1 \rightarrow \frac{ss}{bb}$$

Таким чином, популяція хижаків починає зростати при  $x_1$ , яке дорівнює  $\frac{s}{b} = 75$

Фазовий простір:



Періодичність проявляється в фазовому просторі у замкненості фазової траєкторії.



### 3.3. Модель Вольтерра-Лотка "Хижак - жертва" з логістичною поправкою

Система нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{d}{dt}x_1 = g \cdot x_1 - a \cdot x_1 \cdot x_2 + \gamma \cdot x_1^2 \quad g := 0.3 \quad \begin{array}{l} \text{Коефіцієнт збільшення чисельності} \\ \text{жертв} \\ \text{при відсутності хижаків} \end{array}$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = -s \cdot x_2 + b \cdot x_1 \cdot x_2 + \gamma \cdot x_2^2 \quad s := 0.3 \quad \begin{array}{l} \text{Коефіцієнт зменшення чисельності} \\ \text{хижаків при відсутності жертв} \end{array}$$

$a := 0.02$     Параметр, що описує зменшення чисельності жертв через зустрічі із хижаками

$b := 0.004$     Параметр, що описує збільшення чисельності хижаків завдяки зустрічі з жертвами

$\gamma := 0.00015$     **Позитивна логістична поправка**

**Чисельне рішення системи диференціальних рівнянь:**

$x_1(0) = 100$      $x_2(0) = 40$     Початкова популяція жертв та хижаків

Рішення системи диференціальних рівнянь за допомогою функції *rkfixed*

$Y := \begin{pmatrix} 100 \\ 40 \end{pmatrix}$     Часовий інтервал для чисельних розрахунків:

$N := 600$     Кількість кроків для чисельних розрахунків

$t_0 := 0$     Початковий момент часу

$t_k := 100$     Кінцевий момент часу

Вектор D вміщує диференціальні рівняння.

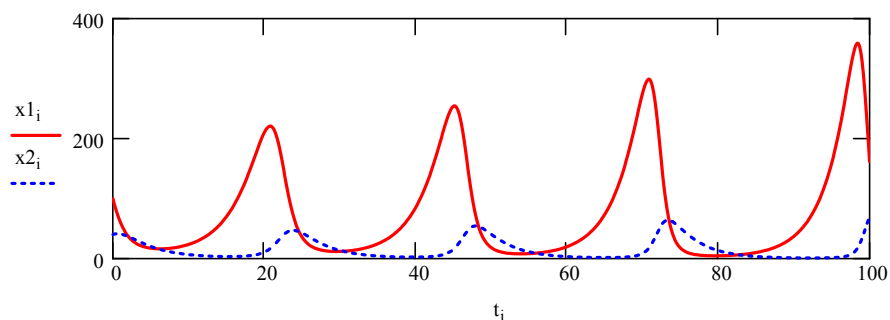
$$D(t, Y) := \begin{bmatrix} g \cdot Y_0 - a \cdot Y_0 \cdot Y_1 + \gamma \cdot (Y_0)^2 \\ -s \cdot Y_1 + b \cdot Y_0 \cdot Y_1 + \gamma \cdot (Y_1)^2 \end{bmatrix}$$

$Z := \text{rkfixed}(Y, t_0, t_k, N - 1, D)$     Застосування метода Рунге-Кутта. Рішення Z представляє собою матрицю розміром Nx3. Перший стовпчик цієї матриці Z<0> вміщує моменти часу, наступні стовпчики Z<1>, Z<2> вміщують значення функцій x1, x2, що відповідають цим моментам.

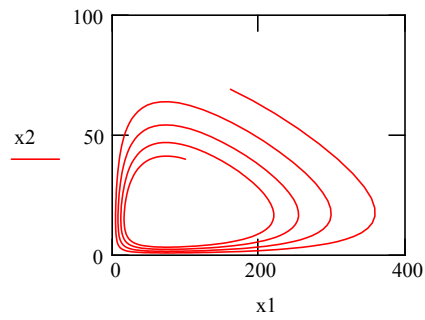
$t := Z \langle 0 \rangle$

$x_2 := Z \langle 2 \rangle$

Динаміка змінювання популяції тварин-жертв та хижаків:     $i := 0..N - 1$



Фазовий простір:



Незамкнена фазова траєкторія. Амплітуда коливань чисельності зростає.

$$\gamma := -0.00015$$

**Негативна логістична поправка**

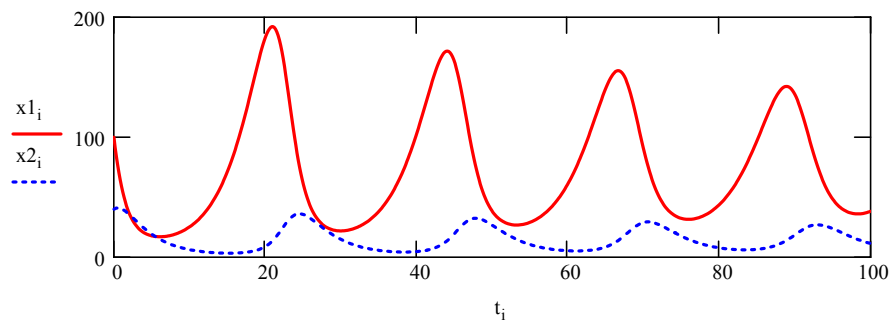
$$D(t, Y) := \begin{bmatrix} g \cdot Y_0 - a \cdot Y_0 \cdot Y_1 + \gamma \cdot (Y_0)^2 \\ -s \cdot Y_1 + b \cdot Y_0 \cdot Y_1 + \gamma \cdot (Y_1)^2 \end{bmatrix}$$

$Z := \text{rkfixed}(Y, t_0, t_k, N - 1, D)$

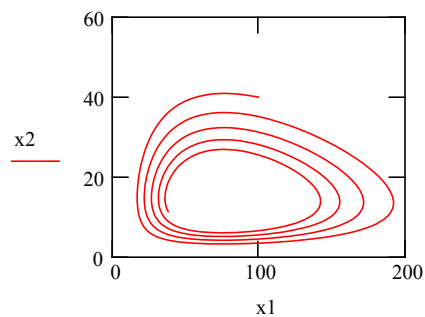
$t := Z \langle 0 \rangle$

$x_2 := Z \langle 2 \rangle$

Динаміка змінювання популяцій тварин-жертв та хижаків:  $i := 0..N - 1$



Фазовий простір:



Незамкнена фазова траєкторія. Амплітуда коливань чисельності зменшується.

### 3.4. Модель Холлінга-Теннера "Конкуруючі види"

Система нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{d}{dt}x_1 = r \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) \cdot x_1 - \frac{w \cdot x_1 \cdot x_2}{D + x_1} \quad \frac{d}{dt}x_2 = c \cdot \left(1 - \frac{J \cdot x_2}{x_1}\right) \cdot x_2$$

Параметри моделі:  $r := 2$     $c := 0.4$     $K := 70$     $D := 1.5$     $J := 0.6$     $w := 1.4$

#### Чисельне рішення системи диференціальних рівнянь:

$x_1(0) = 100$     $x_2(0) = 40$    Початкова популяція жертв та хижаків

Рішення системи диференціальних рівнянь за допомогою функції *rkfixed*

$$Y := \begin{pmatrix} 100 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Часовий інтервал для чисельних розрахунків:

$N := 600$    Кількість кроків для чисельних розрахунків  
 $t_0 := 0$    Початковий момент часу  
 $t_k := 100$    Кінцевий момент часу

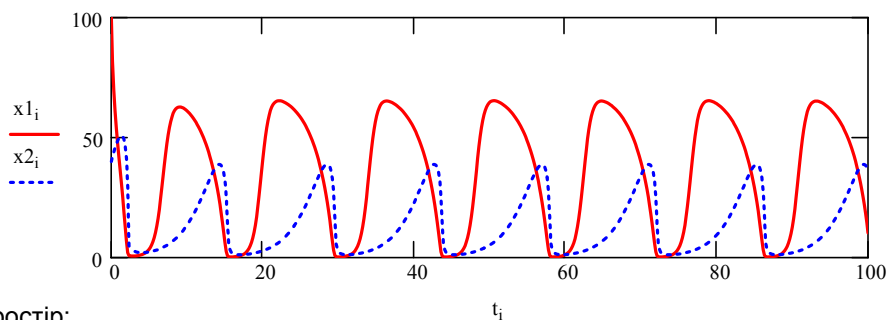
Вектор D вміщує диференціальні рівняння.

$$Q(t, Y) := \begin{bmatrix} r \cdot \left(1 - \frac{Y_0}{K}\right) \cdot Y_0 - \frac{w \cdot Y_0 \cdot Y_1}{D + Y_0} \\ c \cdot \left(1 - \frac{Y_1 \cdot J}{Y_0}\right) \cdot Y_1 \end{bmatrix}$$

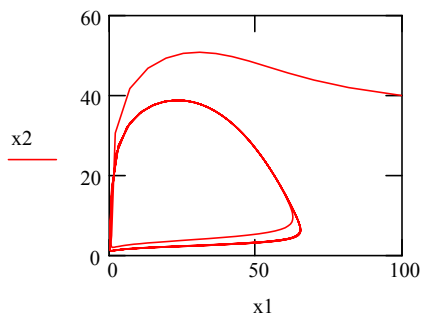
$Z := \text{rkfixed}(Y, t_0, t_k, N - 1, Q)$

$t := Z^{(0)}$     $x_2 := Z^{(2)}$

Динаміка змінювання популяції тварин-жертв та хижаків:    $i := 0..N - 1$



Фазовий простір:



Фазова траєкторія у вигляді стійкого граничного циклу, що намотується ззовні на замкнуту криву.

$$c = 0.4 \quad \frac{r \cdot (K - D - 2)}{K \cdot (1 + D)} = 0.76$$